

УДК 534.16

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЕ, МОДЕЛИРУЕМОЙ ЦЕПОЧКАМИ АКТИВНЫХ ЧАСТИЦ МОРЗЕ–ВАН ДЕР ПОЛЯ

© 2025 г. А. И. Землянухин^а, А. В. Бочкарев^а, В. И. Ерофеев^{б,с}, И. С. Павлов^{б,с,*}

^аСаратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., Саратов, Россия

^бИнститут проблем машиностроения РАН — филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения “Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук”, Нижний Новгород, Россия

^сНациональный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

*e-mail: ispavlov@mail.ru

Поступила в редакцию 30.06.2024 г.

После доработки 20.09.2024 г.

Принята к публикации 24.12.2024 г.

Методами численного моделирования исследованы процессы генерации и распространения нелинейных периодических волн в деформируемой среде, моделируемой различными цепочками активных частиц Морзе–ван дер Поля. В широком диапазоне длин цепочек определены интервалы изменения периодов волн. Показано, что в коротких цепочках консервативные силы Морзе значительно больше пространственно–зависимых сил активного трения, вследствие чего волновой процесс происходит по консервативному сценарию. В длинных цепочках выявлен процесс трансформации нелинейной периодической волны в диссипативный солитон, минимальная скорость которого соответствует максимальному значению периода. Установлено, что зависимость значения минимального периода от числа частиц в цепочке практически линейна. Продемонстрирована неустойчивость распространения начальных возмущений, состоящих из нескольких выявленных ранее одинаковых периодических решений.

Ключевые слова: нелинейная деформируемая среда, цепочки активных частиц Морзе–ван дер Поля, периодические волны, диссипативный солитон

DOI: 10.31857/S0320791925010024, EDN: BRBVGU

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, линейные модели принципиально не подходят для изучения солитонов и других процессов самоорганизации, свойственных исключительно нелинейным системам. В последние десятилетия активно развивается новое направление, посвященное изучению динамики неконсервативных нелинейных решеток, полностью или частично состоящих из активных частиц. Частицы такого рода способны к диссипации/накоплению кинетической энергии в процессе взаимодействия с окружающей средой и позволяют моделировать совокупности объектов биологической и искусственной природы, много более сложных, чем атомы.

Цепочками активных частиц можно моделировать, к примеру, акустические метаматериалы [1], функциональность которых основана на эффектах

обобщенной синхронизации нелинейных диссипативных решеток активных частиц, способных к непосредственной генерации, усилению и селекции акустических колебаний [2].

Примером цепочки активных частиц может являться также грунт или горная порода, в частности, при решении задач распространения в них упругой продольной волны, генерируемой проходящим высокоскоростным железнодорожным составом. Исследование воздействия на грунт движения высокоскоростных поездов является весьма актуальной задачей из-за потенциального возникновения явлений, вредных для окружающей среды. Дискретная же структура грунта уже довольно давно является общепризнанным фактом [3], и к настоящему времени разработано немало его дискретных моделей [4], среди которых следует отметить

модели Герца–Миндлина контакта частиц с трением [5] и модель Бахолдина–Ястребова, в рамках которой грунт представляется средой из комплекса минеральных частиц, находящихся в состоянии предельного равновесия при нагружении [6]. В этой модели восприятие нагрузок (сжимающих и сдвиговых) обеспечивается силами трения между минеральными частицами. Модель Бахолдина–Ястребова подходит для таких широко распространенных грунтов, как песок и глинистые почвы с водокolloидными связями, однако она создавалась для исследования действия на землю вертикальной нагрузки, в то время как при движении железнодорожных составов больший интерес вызывает распространение упругих продольных волн вдоль железнодорожного полотна. При решении такой задачи очевидно, что грунт является нелинейной средой, а усиления вызываются прохождением нескольких вагонов по одной и той же точке железнодорожного полотна.

Релаксация скорости звука после вибрационно-го воздействия конечной амплитуды деформаций в карбонатной горной породе, представляющей собой структурно-неоднородный материал со сложной системой внутренних связей, была экспериментально изучена в работе [7].

В [8] исследованы сейсмические волны техногенной природы, бегущие вдоль свободной поверхности и уходящие вглубь земной толщи. Указаны основные физические механизмы возбуждения сейсмических волн, проанализировано их воздействие на карстовые разломы.

В настоящее время одним из наиболее актуальных направлений нелинейной динамики является изучение локализованных колебаний и волн в нелинейных цепочках, решетках и ансамблях. Это обусловлено, в первую очередь, осознанием их роли в процессах накопления и транспорта энергии и электрических зарядов в дискретных и непрерывных системах различной физической природы [2, 9–14].

В отличие от локализованных волн, периодические нелинейные волны в дискретных системах исследованы в меньшей степени. Тем не менее, в консервативных моделях они изучены достаточно подробно. Так, в работе [15] показано, что в цепочке Тоды периодические волны малой амплитуды совпадают с кноидальными волнами уравнения Кортевега–де Вриза (КдВ). В [16–18] изучаются периодические волны в ангармонических цепочках с локально взаимодействующими частицами. Сильно нелинейные периодические волны в предварительно сжатой цепочке сфер при контакте Герца рассмотрены в [19]. Бифуркации периодических бегущих волн в цепочке “гранулированных димеров” в антиконтинуальном пределе рассмотрены в [20]. Развитие модуляционной неустойчивости и

возникновение волн-убийц при распространении периодических волн дискретного уравнения мКдВ исследовано в [21]. Бегущие периодические волны в цепочках типа Ферми–Паста–Улама (ФПУ) рассмотрены в [22, 23].

Обобщенная модель цепочки активных частиц Морзе–ван дер Поля с учетом нелокальности связи между частицами изучалась в [24]. В частности, было установлено, что в такой модели возможно возникновение и устойчивое распространение диссипативных кинков и солитонов. Данная же работа призвана восполнить пробелы в исследовании периодических волн в такой модели.

Статья организована следующим образом. В первом параграфе обсуждаются регулярные динамические структуры в цепочках Морзе–ван дер Поля и формулируется цель исследования. Способам генерации периодических волн и определению интервалов изменения периодов волн в цепочках конечной длины посвящен второй раздел. В третьем разделе устанавливаются характерные свойства периодических волн в зависимости от длины цепочки. Методика получения приближенного начального профиля периодической волны изложена в четвертом разделе. В пятом разделе на основе численного моделирования обсуждаются вопросы устойчивости найденных периодических решений.

1. РЕГУЛЯРНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ В ЦЕПОЧКАХ МОРЗЕ–ВАН ДЕР ПОЛЯ

Безразмерное уравнение продольных колебаний частиц в цепочке Морзе–ван дер Поля имеет вид [2, 12]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_n}{d\tau^2} - \mu \left(1 - \frac{u_n^2}{u_m^2} \right) \frac{du_n}{d\tau} = \\ = \left(1 - e^{u_n - u_{n+1}} \right) e^{u_n - u_{n+1}} - \\ - \left(1 - e^{u_{n-1} - u_n} \right) e^{u_{n-1} - u_n}, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_n — перемещение n -й частицы цепочки в момент времени τ , μ есть коэффициент активного трения, u_m — параметр, определяющий границу между областями положительной и отрицательной диссипации.

Изучению регулярных динамических режимов неограниченной цепочки (1) посвящены работы [2, 12]. Уравнение (1) относится к неинтегрируемым дифференциально-разностным уравнениям и его точных нетривиальных решений аналитически найти не удается. Для численного моделирования бесконечная цепочка представляется конечной цепочкой из N частиц с периодическими

граничными условиями, после чего уравнение (1) можно рассматривать как связанную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $u_1(t), \dots, u_N(t)$ и применять для ее решения любой подходящий численный метод. В исследованиях [2, 12] использовался метод Рунге–Кутты 4–5 порядков точности с адаптивным шагом, предназначенный для решения уравнений и систем нежесткого типа. Для запуска расчетов метод требует задания $2N$ начальных условий для перемещений и скоростей частиц, и на начальном этапе исследования цепочки (1) эти условия назначались случайным образом, как равномерно распределенные на заданном отрезке случайные величины.

В результате численных экспериментов выяснилось, что существуют две области больших и малых значений N , при которых поведение цепочки существенно различается. При больших N , превышающих примерно 20 (в зависимости от значений параметров μ и u_m), наибольшим бассейном притяжения из регулярных динамических структур обладает аттрактор, состоящий из генератора солитонов, поглотителя солитонов и собственно солитонов, движущихся от генератора к поглотителю. Наблюдение за этим аттрактором позволило установить, что в цепочке (1) существуют солитоны с несимметричным профилем — крутым передним фронтом и пологим задним фронтом, способные к устойчивому распространению на фоне пьедестала (одинакового начального смещения частиц $u_n|_{t=0} = P$) [2]. Такая несимметричная форма уединенных волн является характерной для солитонов в диссипативных системах [12].

Выяснилось, что диапазон значений пьедесталов, подходящих для солитонов, достаточно узок: $2u_m < |P| < 2.3u_m$. При отрицательных пьедесталах P существуют солитоны, движущиеся вправо по цепочке, в сторону увеличения номеров частиц; при положительных пьедесталах имеются солитоны обратной полярности, движущиеся в противоположную сторону. Скорость солитона, его высота, ширина и прочие параметры однозначно определяются значением пьедестала. Солитоны устойчивы к малым возмущениям положений и скоростей частиц и формируются в цепочке с помощью простейших начальных условий: перемещения всех частиц равны P , все частицы неподвижны, кроме одной, имеющей начальную скорость v_0 в направлении нулевого перемещения. Установлено, что одиночные солитоны, расположенные достаточно близко друг от друга, способны формировать устойчивые двухвершинные и многовершинные солитоны [12]. Последнее свойство солитонов цепочки Морзе–ван дер Поля (1) роднит их с солитонами в цепочке Морзе–Рэля [11], хотя прочие их свойства существенно различаются. В частности, солитоны цепочки Морзе–Рэля локализованы всего на 2–3 частицах, в то время как в цепочках

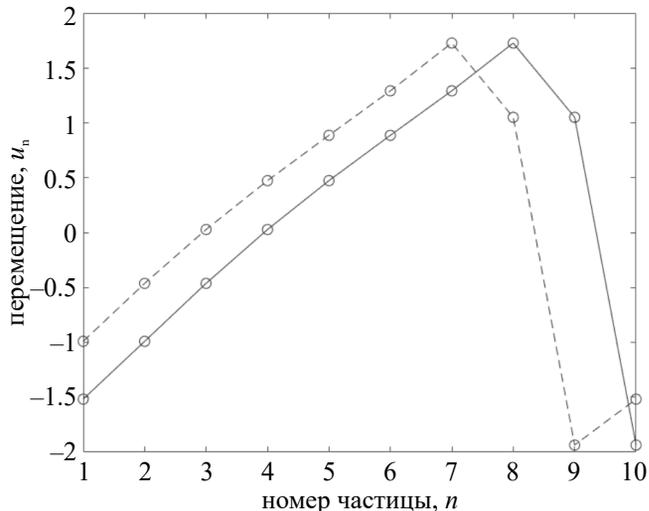


Рис. 1. Форма периодической волны в цепочке Морзе–ван дер Поля при $N = 10$.

Морзе–ван дер Поля самые узкие устойчивые солитоны захватывают не менее 10 частиц. Показано, что формы переднего и заднего фронтов солитона удовлетворительно описываются приближенной аналитической моделью на основе интегрируемых уравнений Цицейки и Абея 2-го рода [2, 12].

В диапазоне пьедесталов $|P| < 2u_m$ вышеупомянутые простейшие начальные условия приводят к формированию в цепочке бегущего кинка. При $|P| > 2.3u_m$ устойчивое распространение кинков и солитонов невозможно: с течением времени амплитуда бегущей уединенной волны монотонно убывает.

В области малых значений N ситуация иная. Запуск колебаний в цепочке при $10 < N < 20$ со случайно заданными начальными условиями приводит либо к тривиальному решению в форме одинакового стационарного смещения частиц, либо к непрекращающимся хаотическим колебаниям. При $N \leq 10$ в цепочке с высокой вероятностью формируются периодические колебания, визуально воспринимаемые как бегущая волна с длиной λ , распределенной по всей цепочке. На рис. 1 показаны два профиля, разделенные одной десятой периода колебаний. (Здесь и далее представлены результаты расчетов для $\mu = u_m = 1$).

Цель данной работы состоит в изучении свойств периодических бегущих волн в цепочках Морзе–ван дер Поля, способов их генерации, устойчивости к возмущениям и связи с другими уединенными волнами в данных нелинейных системах.

2. ГЕНЕРАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛН: ПЕРВЫЙ СПОСОБ

Как упоминалось в предыдущем параграфе, простейшие начальные условия, запускающие

формирование солитонов и кинков в цепочке Морзе–ван дер Поля, не подходят для генерации периодических волн. Причин тут две: во-первых, в цепочках средней длины ($10 < N < 20$) область притяжения солитона как предельного аттрактора много шире таковой области периодической волны; во-вторых, цепочки малой длины ($N < 10$) оказываются слишком короткими для зарождающегося солитона — вместо превращения в периодическую волну солитон разрушается из-за эффекта самовоздействия и порождает хаотические колебания. Тем не менее, иногда запуск со случайными начальными условиями, когда начальные перемещения и скорости частиц считались случайными величинами с нулевыми средними значениями, приводил к возникновению бегущей периодической волны.

Чтобы узнать, имеется ли однозначное соответствие между количеством частиц N в цепочке и периодом колебаний T , использовалась следующая простая процедура.

ПРОЦЕДУРА 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИАПАЗОНА ИЗМЕНЕНИЯ ПЕРИОДА ВОЛНЫ В ЦЕПОЧКЕ ИЗ N ЧАСТИЦ

Если для цепочки с N частицами при помощи случайных начальных условий удавалось получить установившуюся периодическую волну (волна считалась установившейся, если относительное изменение периода $\Delta T/T$ не превосходило 10^{-6}), то перемещения u_n и скорости $\frac{du_n}{dt}$ частиц такой волны, соответствующие некоторому моменту времени t , после добавления “шумовых” слагаемых с амплитудами порядка $10^{-2} \max_n u_n$ и $10^{-2} \max_n \frac{du_n}{dt}$, соответственно, принимались в качестве начальных условий для нового расчета системы (1) по методу Рунге–Кутты. Малые шумовые добавки, не грозящие волне полным разрушением, приводили, после завершения переходных процессов, к формированию новой периодической волны с близким периодом T_1 . При поиске верхней границы периода, данный шаг повторялся до получения волны с периодом T_1 , $T_1 > T$, после чего весь процесс запускался вновь для волны с периодом T_1 с целью получения новой волны с периодом $T_2 > T_1$. Предел монотонно возрастающей последовательности T_1, T_2, T_3, \dots дает оценку верхней границы допустимых периодов; нижняя граница отыскивалась аналогично.

С помощью процедуры 1 удалось установить нижние и верхние границы периодов для коротких цепочек $3 < N < 10$. Непосредственному применению этой процедуры для средних цепочек ($10 \leq N < 20$) мешала невозможность получения каких-либо периодических волн при запуске со

случайными начальными условиями. Для решения этой проблемы была создана процедура 2, описание которой представлено ниже.

Формы периодических волн для любых длин цепочки N , кроме самых минимальных ($2 \leq N \leq 3$), имеют внешнее сходство и включают крутой передний фронт и пологий задний. Тем не менее, прямое масштабирование профиля волны, например, для $N = 10$ на случай $N = 11$ в попытке использовать его в качестве начального условия (аппроксимация нулевого порядка), не приводит к успеху — через некоторое непродолжительное время волна разрушается, оставляя после себя хаотические колебания. Причина этого неуспеха кроется в том, что область притяжения периодической волны как аттрактора при $10 \leq N < 20$ слишком узка, и для попадания в нее необходимо повысить порядок аппроксимации с нулевого до первого. Последнее действие требует наличия двух профилей волн для цепочек с $N - 2$ и с $N - 1$ частицами, причем произвольные профили не годятся. Дело в том, что при фиксированном N форма профиля существенно изменяется при увеличении периода волны T от нижней границы T_{\min} до верхней T_{\max} (рис. 2). Поэтому для аппроксимации первого порядка следует использовать два “родственных” профиля, каждый из которых соответствует либо T_{\min} , либо T_{\max} (рис. 3).

ПРОЦЕДУРА 2. ПОСТРОЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФОРМЫ ВОЛНЫ В ЦЕПОЧКЕ N ЧАСТИЦ ПО ИЗВЕСТНЫМ ПРОФИЛЯМ ВОЛН В ЦЕПОЧКАХ ИЗ $N - 1$ И $N - 2$ ЧАСТИЦ

Особенности профилей, совмещенных по значению минимального перемещения (рис. 3), вынуждают проводить аппроксимацию первого порядка отдельно для последней частицы и для совокупности остальных частиц. В первом случае используется формула

$$u_N^{(N)} = 2u_{N-1}^{(N-1)} - u_{N-2}^{(N-2)}, \quad (2)$$

где $u_n^{(N)}$ — перемещение n -й частицы в цепочке из N частиц. Во втором случае дискретная функция $u_n^{(N)}, n = 1..N - 1$ заменяется при помощи кусочно-линейной интерполяции на непрерывную функцию $U^{(N)}$ непрерывной переменной $x, x \in [0, 1]$, производятся вычисления начального приближения

$$U^{(N)} = 2U^{(N-1)} - U^{(N-2)}, \quad (3)$$

после чего происходит возврат к дискретной функции.

Процедуры 1 и 2 определяют первый способ получения начальных условий для возбуждения

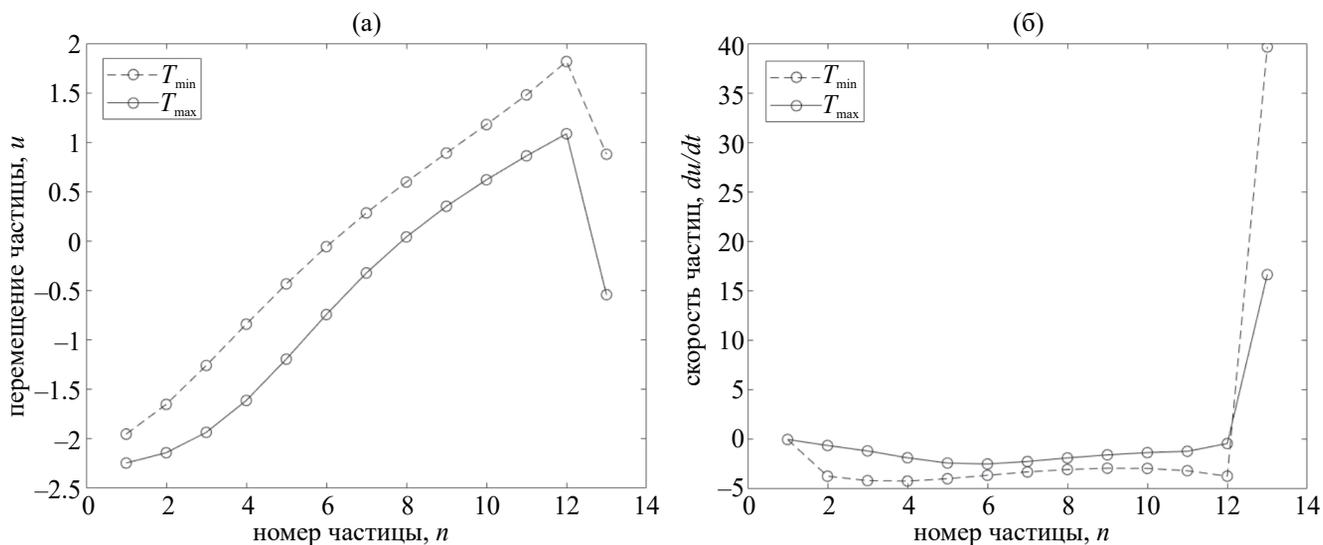


Рис. 2. (а) — Профили перемещения и (б) — скорости частиц в периодической волне при $N = 13$ для минимального и максимального значений периода.

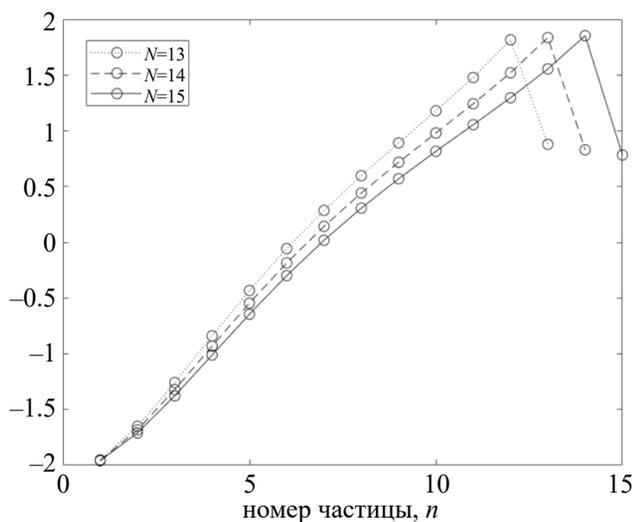


Рис. 3. Профили периодической волны, соответствующие минимальным периодам для $N = 13..15$.

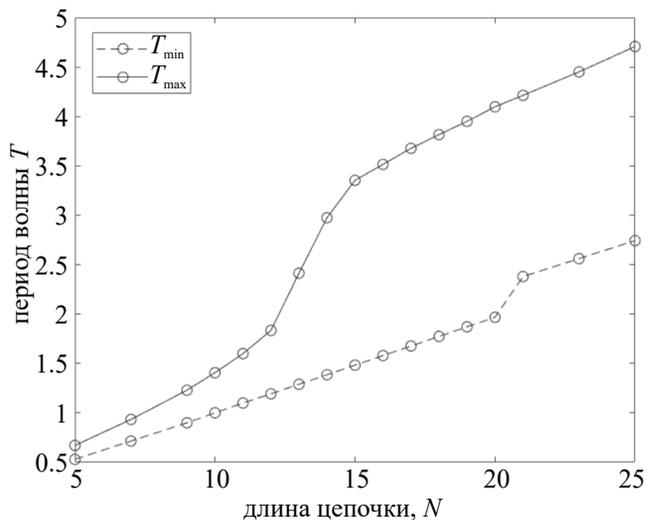


Рис. 4. Нижняя и верхняя границы периодов волны в цепочках из N частиц.

периодической волны в цепочке Морзе–ван дер Поля.

3. СВОЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛН ЦЕПОЧЕК МОРЗЕ–ВАН ДЕР ПОЛЯ

Совместное использование 1-й и 2-й процедур позволило установить пределы изменения периода для всего интересующего нас диапазона длин цепочки $5 \leq N \leq 25$ (рис. 4). Как видим, в диапазоне $20 < N < 21$ для нижней границы периода и в диапазоне $12 < N < 15$ для его верхней границы происходит изменение характера кривой, что можно объяснить, подробно рассмотрев динамику n -й частицы в процессе движения периодической волны по цепочке.

Очевидно, что каждая частица совершает одинаковое движение по замкнутой траектории в течение периода колебаний волны T . Условимся за начало отсчета этой траектории считать состояние частицы, при котором $u|_{t=0} = u_{\min}$, $\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = 0$ (в

этом состоянии находится частица с номером 1 на рис. 2, 3 и 5). После удара со стороны своей “соседки” слева, рассматриваемая частица быстро достигает своего максимального положительного перемещения u_{\max} , а затем медленно возвращается в исходное положение, после чего цикл повторяется. На рис. 2, 3, 5 можно наблюдать последовательные изменения состояния частицы через равные промежутки времени $\frac{T}{N}$, если номер

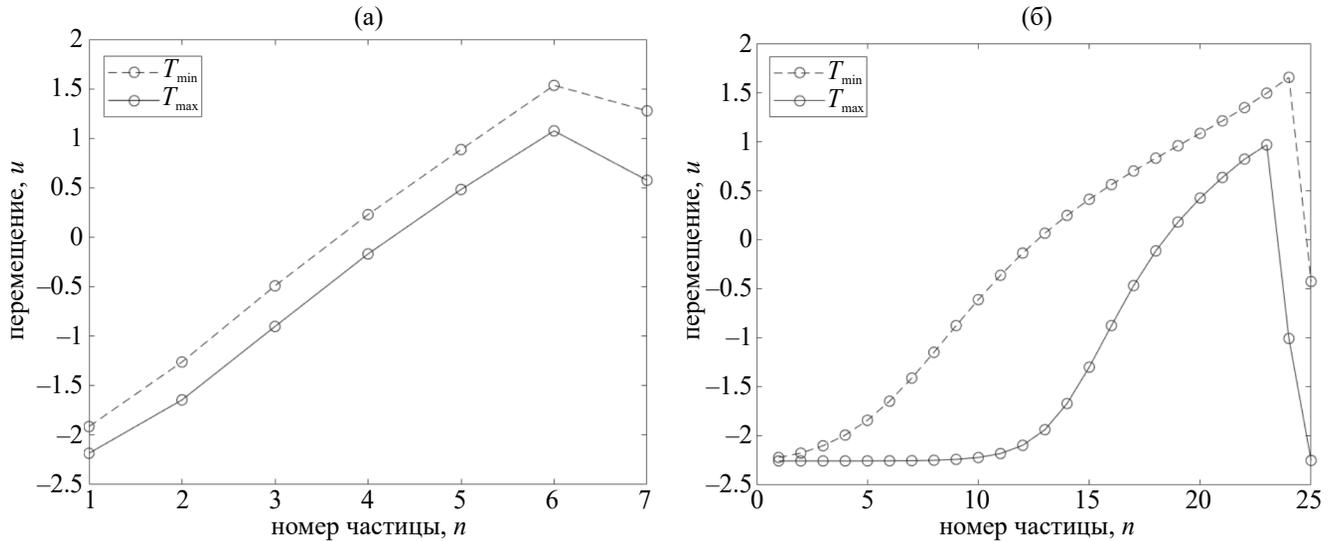


Рис. 5. Профили периодических волн при (а) — $N = 7$ и (б) — $N = 25$.

частицы n менять согласно последовательности $1 \rightarrow N \rightarrow (N - 1) \rightarrow (N - 2) \rightarrow \dots \rightarrow 2 \rightarrow 1$. При этом циклическом движении частица проходит через область отрицательной диссипации $|u| < u_m$, в которой сила активного трения (второе слагаемое в левой части уравнения) совершает положительную работу и стремится увеличить кинетическую энергию частицы. Тем не менее, задний фронт волны для коротких цепочек (рис. 5а) выглядит почти прямолинейным — малые значения периодов колебаний в таких цепочках обеспечиваются большими скоростями движения частиц по заднему фронту волны, что возможно, если амплитуда консервативных сил Морзе существенно выше амплитуды сил активного трения. Иными словами, колебания в коротких цепочках ($N < 10$) происходят почти по консервативному сценарию. Эта гипотеза подтверждается результатами прямого численного моделирования цепочки Морзе, в которой отсутствует второе слагаемое левой части уравнения (1). Профили перемещений, соответствующие максимальному T_{\max} и минимальному T_{\min} периодам близки по форме; основное отличие — в вертикальном смещении (рис. 5а). Период T_{\max} достигается при максимально возможном смещении вниз, при котором частицы с большими по модулю отрицательными перемещениями попадают в зону наиболее интенсивной положительной диссипации (частицы 1 и 2 на рис. 5а). Упомянутое максимально возможное смещение определяется ограничением $u_{\max} \geq u_m$, нарушение которого ведет к необратимому уменьшению амплитуды волны со временем вплоть до ее разрушения.

Профили волн в длинных цепочках, при $N > 20$, имеют иной вид (рис. 5б). Во-первых, хорошо заметно искривление заднего фронта из-за возросшего влияния сил активного трения. Задний фронт

при $T = T_{\max}$ успевает выйти на стационарное значение $u_{\min} \approx -2.3u_m$, следовательно, периодическая волна трансформировалась, по сути, в одиночный диссипативный солитон, параметры и формы профиля которого были изучены нами ранее [2]. Таким образом, значение T_{\max} для длинных цепочек определяется минимальной скоростью движения одиночных солитонов по цепочке. При “развертывании” конечной цепочки с N частицами и периодическими граничными условиями в бесконечную цепочку мы получаем совокупность одинаковых невзаимодействующих между собой солитонов.

Напротив, переходя к бесконечной цепочке при $T = T_{\min}$, мы имеем дело с предельным случаем многовершинного солитона [12], представляющего устойчивую систему связанных одиночных солитонов. Как известно, высота пьедестала, по которому распространяется солитон, однозначно определяет ширину и скорость солитона, поэтому скорость солитона связана с его шириной неявной зависимостью. Ширину одиночного солитона в составе многовершинного комплекса определяет размер N цепочки — отсюда можно вывести зависимость $T_{\min}(N)$. Согласно рис. 4 эта зависимость практически линейна.

Наконец, цепочки средней длины $10 \leq N \leq 20$ являются переходными от почти консервативных коротковолновых колебаний к длинноволновым колебаниям солитонного типа.

4. ВТОРОЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛН

В работе [24] нами предложен простой метод отыскания приближенных уединенно-волновых решений уравнения (1), основанный на

кусочно-сплайновой интерполяции функции $u_n(\tau)$ с последующей численной минимизацией невязки уравнения. Выясним, можно ли использовать данный подход для получения профиля периодических волн.

Суть метода следующая. При движении периодической волны по цепочке, как упоминалось выше, каждая частица совершает одинаковое движение и для зависимостей перемещения n -й и $(n + 1)$ -й частиц от времени мы имеем

$$u_n(\tau) = u_{n+1}(\tau - \Delta\tau), \tag{4}$$

где $\Delta\tau = \frac{T}{N}$. С учетом (4) система уравнений (1) превращается в неинтегрируемое дифференциально-разностное уравнение с запаздыванием и опережением

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\tau^2} - \mu \left(1 - \frac{u^2}{u_m^2} \right) \frac{du}{d\tau} = \\ = (1 - e^{\Delta_1})e^{\Delta_1} - (1 - e^{\Delta_2})e^{\Delta_2}, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\Delta_1 = u(\tau) - u(\tau - \Delta\tau), \quad \Delta_2 = u(\tau + \Delta\tau) - u(\tau). \tag{6}$$

Основными параметрами, которые должны быть заданы для начала расчета, являются константы μ и u_m уравнения (5), число частиц N и период колебаний T . Чтобы исключить тривиальное решение $u = \text{const}$ уравнения (5) из множества допустимых решений, необходимо правильное задание нижней и верхней границ варьируемых параметров для метода оптимизации, минимизирующего невязку. Форма профиля периодической

волны, несмотря на зависимость от N и T , имеет общее свойство: первоначальное быстрое возрастание, начиная от u_{\min} ($-2.3u_m < u_{\min} < -1.9u_m$) до максимума u_{\max} ($u_m < u_{\max} < 1.9u_m$), а затем медленное убывание до исходного u_{\min} (рис. 6а).

На промежутке времени $[0, T]$ выбиралась неравномерная сетка из 15–30 узлов $0 = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_M = T$, со сгущением в области переднего фронта. Варьируемыми параметрами являлись M значений перемещений на этой сетке: $u(\tau_1), \dots, u(\tau_M)$, с учетом условия периодичности $u(\tau_0) = u(\tau_M)$. В промежутках между узловыми значениями искомая функция $u(\tau)$ интерполировалась кубическими сплайнами с периодическим продолжением, что позволяло вычислять производные в уравнении (5) аналитически. В качестве невязки уравнения называлась сумма квадратов разностей левой и правой частей (5) по всем узловым значениям τ_0, \dots, τ_M . После задания кусочно-линейных ограничений на допустимые значения варьируемых параметров (показаны пунктирными линиями на рис. 6б), для минимизации невязки использовался метод Левенберга–Марквардта. На рис. 6б показана зависимость $u(\tau)$, найденная методом минимизации невязки, с указанием значения последней; кружки соответствуют значениям варьируемых величин. Абсолютная погрешность в сравнении с решением, использующим процедуры 1 и 2, не превосходит 0.5% во всем диапазоне времен. Преимуществом использования второго подхода является увеличение скорости расчета в 10–20 раз, к недостаткам — необходимость в некоторых случаях тонкой настройки начального приближения и ограничений

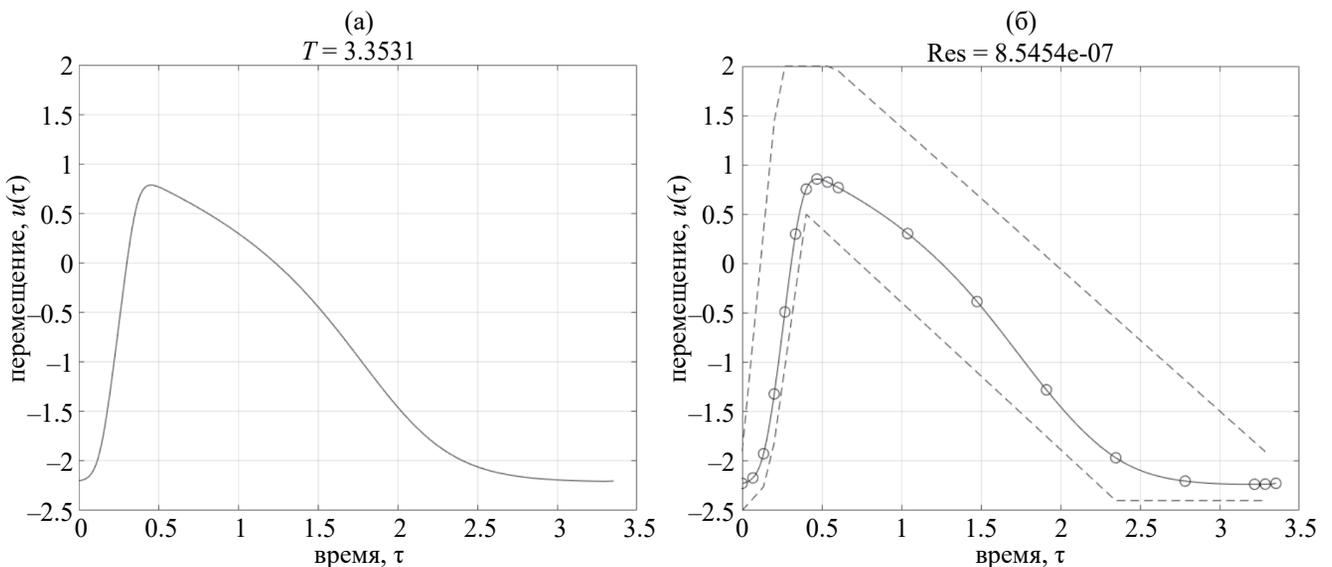


Рис. 6. (а) — Зависимость $u(t)$, найденная при помощи процедур 1 и 2 для $N = 15$ и $T = 3.3531$; (б) — та же зависимость, полученная вторым способом.

для параметров варьирования, препятствующих попаданию в локальный минимум невязки.

5. ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ НАЙДЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (1), записанная для конечной цепочки из N частиц и приведенная к нормальной форме, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности задачи Коши. Однако периодические решения этой системы, рассматриваемые в данной работе, не являются устойчивыми в смысле Ляпунова. Не имея аналитического представления периодических решений, покажем справедливость последнего утверждения численно. Для этого

1) найдем для цепочки из N частиц какое-нибудь приближенное периодическое решение с периодом T^* любым из вышеизложенных методов,

2) добавим к перемещениям u_n^* и скоростям $\frac{du_n^*}{d\tau}$

частиц, соответствующим найденному решению в некоторый момент времени, “шумовые” слагаемые и используем полученное в качестве начальных условий для численного решения (1) по методу Рунге-Кутты:

$$u_n|_{t=0} = u_n^* + A \max_n |u_n^*| \times R(-1,1),$$

$$\frac{du_n}{d\tau}|_{t=0} = \frac{du_n^*}{d\tau} + A \max_n \left| \frac{du_n^*}{d\tau} \right| \times R(-1,1), \quad (7)$$

где A — относительная амплитуда шума, $R(a,b)$ — равномерно распределенная на отрезке $[a,b]$ случайная величина.

Численное моделирование показывает, что для каждого N существует диапазон амплитуд шума $0 < A < A_{\max}(N)$, при которых в цепочке устанавливаются периодические колебания, но период T этих колебаний отличен от T^* . В табл. 1, 2 показаны параметры распределения случайной величины T при различных амплитудах A и двух цепочек,

Таблица 1. Параметры распределений периода колебаний T при $N = 7$, $T^* = 0.825$.

A	T_{\min}	T_{\max}	\bar{T}	$\sigma(T)$	P
10^{-4}	0.819	0.832	0.825	0.00208	1
4×10^{-4}	0.803	0.852	0.826	0.00841	1
10^{-3}	0.779	0.912	0.829	0.0229	0.99
2×10^{-3}	0.758	0.913	0.820	0.0318	0.87
4×10^{-3}	0.723	0.913	0.804	0.0417	0.67
10^{-2}	0.715	0.913	0.774	0.0483	0.56

короткой и длинной. В последнем столбце каждой таблицы приводится оценка вероятности получения периодического решения в цепочке с начальными условиями при заданной амплитуде шума.

Таким образом, даже при малых вариациях начальных условий период T нового решения u_n отличается от периода T^* базового решения u_n^* , следовательно, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|u_n(\tau) - u_n^*(\tau)\|$ не существует и классическая устойчивость по Ляпунову отсутствует.

В то же время, если понимать устойчивость в более широком смысле — “периодическое решение устойчиво, если искажение его начальных условий вновь приводит к какому-то периодическому решению” — то такая устойчивость присутствует для $N = 7$ при $A < 10^{-3}$, а для $N = 21$ — при $A < 2 \times 10^{-2}$. С ростом амплитуды шума A диапазон изменений получаемого периода T постепенно расширяется до предельно допустимых для данной цепочки значений. Величина $P = 0.9$ означает, что из 1000 запусков расчета со случайными начальными условиями (7) в 900 случаях система приходила, после завершения переходных процессов, к периодическому решению (периодической волне).

Осталось выяснить, как развиваются колебания в бесконечно длинной цепочке с начальным условием, полученным периодическим продолжением начальных условий для конечной N -цепочки, соответствующих некоторому ее периодическому решению. Оказалось, что уже для $2N$ -цепочки периодические колебания абсолютно неустойчивы даже в широком смысле. На рис. 7 показаны в качестве примера четыре характерных “кадра” процесса колебаний в цепочке из $N = 42$ частиц, начальное условие для которой получено дублированием начальных условий периодического решения в 21-элементной цепочке с периодом $T = 3.30$, зашумленного с амплитудой $A = 10^{-4}$. На первом кадре (рис. 7а) мы видим два идентичных импульса, разделенных равными расстояниями. Из-за случайных искажений формы один импульс начинает двигаться чуть быстрее, и его амплитуда растет, второй импульс постепенно замедляется с

Таблица 2. Параметры распределений периода колебаний T при $N = 21$, $T^* = 3.30$.

A	T_{\min}	T_{\max}	\bar{T}	$\sigma(T)$	P
10^{-4}	3.29	3.30	3.30	0.0008	1
10^{-3}	3.27	3.32	3.30	0.0078	1
10^{-2}	3.05	3.63	3.30	0.080	1
2×10^{-2}	2.81	4.02	3.31	0.163	0.99
4×10^{-2}	2.56	4.06	3.30	0.272	0.91
8×10^{-2}	2.43	4.06	3.24	0.366	0.68

уменьшением амплитуды (рис. 7б). В промежутке времени $43 < \tau < 45$ происходит слияния импульсов (рис. 7в), в результате которого бегущая периодическая волна разрушается (рис. 7г). По схожему сценарию наблюдается слияние пары одиночных солитонов бесконечной цепочки, в результате которого образуется двухвершинный солитон [5]. В рассматриваемом случае из-за более сильного двустороннего взаимодействия импульсов возникающие при их слиянии возмущения столь сильны, что выходят за пределы устойчивости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе на основе численного моделирования установлено, что при использовании случайных начальных условий в коротких цепочках из не более чем десяти активных частиц Морзе–ван

дер Поля возможно возникновение и распространение бегущих периодических волн. В таких цепочках консервативные силы Морзе существенно превосходят силы активного трения, т.е. колебания происходят фактически по консервативному сценарию. В цепочках средней длины для построения начального условия потребовалась специальная процедура, использующая данные уже сгенерированных периодических волн для двух ближайших цепочек меньшей длины.

Определены пределы изменения периодов волн во всех рассмотренных цепочках, включая длинные, содержащие более 20 частиц. Установлено, что в длинных цепочках происходит трансформация периодической волны в одиночный диссипативный солитон, минимальная скорость которого соответствует максимальному значению периода.

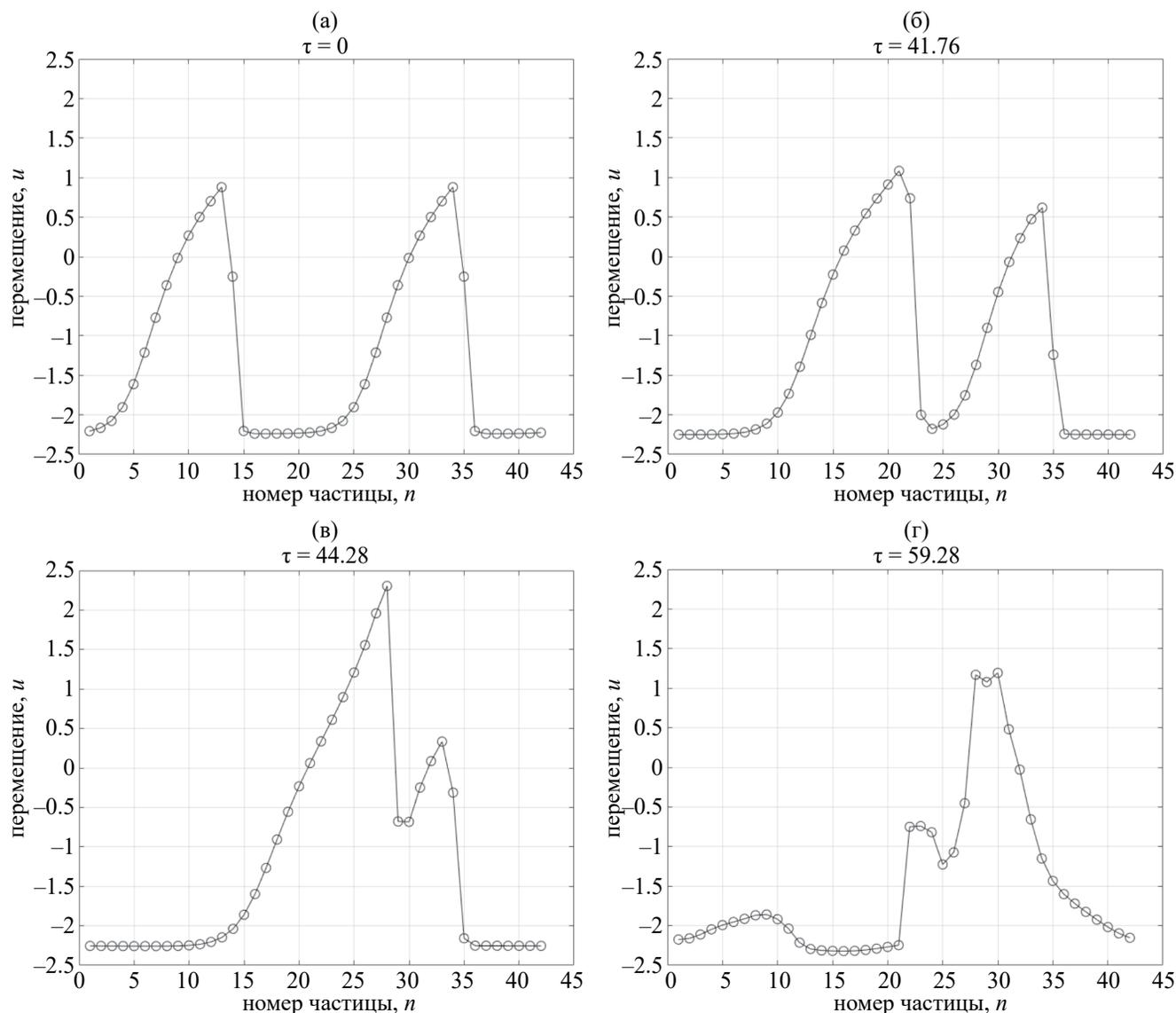


Рис. 7. Процесс разрушения периодического решения в $2N$ -цепочке.

При этом зависимость значения минимального периода от числа частиц в цепочке практически линейна. Цепочки средней длины занимают промежуточное положение между “консервативными” короткими и “солитонными” длинными цепочками.

Численно установлена неустойчивость распространения в бесконечной цепочке комплексов, состоящих из выявленных ранее одинаковых периодических волн.

Полученные результаты могут найти применение, в частности, при создании акустических метаматериалов, функциональность которых основана на эффектах обобщенной синхронизации нелинейных диссипативных решеток активных частиц, способных к непосредственной генерации, усилению и селекции акустических колебаний, и для исследования распространения акустических волн в грунте при движении по нему высокоскоростных железнодорожных составов.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 20-19-00613). Авторы выражают благодарность д.ф.-м.н. А.В. Лебедеву за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бобровницкий Ю.И.* Модели и общие волновые свойства двумерных акустических метаматериалов и сред // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 3. С. 283–294.
2. *Bochkarev A.V., Zemlyanukhin A.I.* Regular dynamics of active particles in the Van der Pol–Morse chain // *Nonlinear Dynamics*. 2021. V. 104. P. 4163–4180. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06579-w>
3. *Гольдштейн М.Н.* Механические свойства грунтов. М.: Изд. лит. по строительству, 1971. 368 с.
4. *Das B.M., Ramana G.V.* Principles of soil dynamics. Cengage learning. 2-nd ed. 2011. 556 p.
5. *Mavko G., Mukerji T., Dvorkin J.* The Rock Physics Handbook. Tools For Seismic Analysis in Porous Media. Cambridge University Press. MA. 2-nd ed. 2009. 524 p.
6. *Бахолдин Б.В., Ястребов П.И.* Дискретная модель песчаных и глинистых грунтов // Строительство и реконструкция. 2015. № 3. С. 4–11.
7. *Лебедев А.В., Мананов С.А.* Экспериментальное исследование медленной релаксации скорости звука в карбонатной породе // Акуст. журн. 2024. Т. 70. № 2. С. 253–272. <https://doi.org/10.31857/S0320791924020138>
8. *Заславский Ю.М., Заславский В.Ю.* Анализ сейсмических колебаний, возбуждаемых движущимся железнодорожным составом // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14. № 1. С. 91–101. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.1.8>
9. *Velarde M.G., Chetverikov A.P., Ebeling W., Dmitriev S.V., Lakhno V.D.* From solitons to discrete breathers // *The European Physical J. B*. 2016. V. 89. P. 233.
10. *Chetverikov A.P., Ebeling W., Velarde M.G.* Dissipative solitons and complex currents in active lattices // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2006. V. 16. P. 1613–1632.
11. *Chetverikov A.P., Sergeev K.S., del Rio E.* Dissipative Solitons and Metastable States in a Chain of Active Particles // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2018. V. 28. N 08. P. 1830027.
12. *Bochkarev A.V., Zemlyanukhin A.I., Chetverikov A.P., Velarde M.G.* Single and multi-vertices solitons in lattices of active Morse-van der Pol units // *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul.* 2022. V. 114. Art. no. 106678. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106678>
13. *Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Мальханов А.О.* Нелинейные локализованные продольные волны в метаматериале, задаваемом как цепочка “масса-в-масса” // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 5. С. 475–478.
14. *Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Pavlov I.S.* Inelastic interaction and splitting of strain solitons propagating in a one-dimensional granular medium with internal stress // *Advanced Structured Materials*. 2016. V. 42. P. 145–162.
15. *Toda M.* Theory of Nonlinear Lattices. Springer-Verlag, 1989.
16. *Valkering T.P.* Periodic permanent waves in an anharmonic chain with nearest-neighbour interaction // 1978 *J. Phys. A: Math. Gen.* 11 1885.
17. *Makita P.* Periodic and homoclinic travelling waves in infinite lattices // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 2011. V. 74. N 6. P. 2071–2086. <https://doi.org/10.1016/j.na.2010.11.011>
18. *Rodriguez-Achach M., Perez G.* Periodic traveling waves in nonlinear chains // *Revista Mexicana de Fisica*. 1996. V. 42. N 5. P. 878–896.
19. *Nesterenko V.F., Herbold E.B.* Periodic waves in a Hertzian chain // *Physics Procedia*. 2010. V. 3. P. 457–463.
20. *Betti M., Pelinovsky D.E.* Periodic Travelling Waves in Dimer Granular Chains // *J. of Nonlinear Science*. 2013. V. 23. P. 689–711.
21. *Chen J., Pelinovsky D.E.* Periodic waves in the discrete mKdV equation: Modulational instability and rogue waves // *Physica D*. 2023. V. 445. 133652.
22. *Arioli G., Gazzola F.* Periodic motion of an infinite lattice of particles with nearest neighbor interaction // *Nonlin. Anal.* 1996. V. 26. N. 6. P. 1103–1114.
23. *Pankov A.* Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices. Imperial College Press, London–Singapore, 2005.
24. *Землянухин А.И., Бочкарев А.В., Павлов И.С.* Уединенные волны в цепочке Морзе–ван дер Поля с нелокальными связями между частицами // Изв. ВУЗов: Радиофизика. 2024. Т. 67. № 6. С. 532–544.

Nonlinear periodic waves in a deformable medium modeled by chains of active Morse–van der Pol particles

A. I. Zemlyanukhin^a, A. V. Bochkarev^a, V. I. Erofeev^{b,c}, I. S. Pavlov^{b,c,*}

^aYuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia

^bFederal Research Center A.V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the RAS — Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia

^cNational Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia

**e-mail: ispavlov@mail.ru*

Using numerical modeling methods, the processes of generation and propagation of nonlinear periodic waves in a deformable medium modeled by various chains of active Morse–van der Pol particles were studied. In a wide range of chain lengths, the intervals of change in wave periods are determined. It is shown that in short chains the conservative Morse forces are much greater than the spatially dependent forces of active friction, as a result of which the wave process occurs according to a conservative scenario. In long chains, the process of transformation of a nonlinear periodic wave into a dissipative soliton, the minimum speed of which corresponds to the maximum value of the period, has been revealed. It has been established that the dependence of the minimum period on the number of particles in the chain is almost linear. The instability of the propagation of initial disturbances consisting of several previously identified identical periodic solutions is demonstrated.

Keywords: a nonlinear deformable medium, chains of active Morse–van der Pol particles, periodic waves, a dissipative soliton