

УДК 534.222

НЕЛИНЕЙНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В РЕЗОНАТОРЕ С ДИСЛОКАЦИОННЫМ ГИСТЕРЕЗИСОМ И ЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

© 2025 г. В. Е. Назаров^{а,*}, С. Б. Кияшко^а

^аИнститут прикладной физики им. А.В. Гапонова–Грехова РАН, ул. Ульянова 46, Нижний Новгород, 603950 Россия

*e-mail: v.e.nazarov@ipfran.ru

Поступила в редакцию 14.06.2024 г.

После доработки 14.06.2024 г.

Принята к публикации 24.12.2024 г.

Методом возмущений проведено теоретическое исследование нелинейных акустических эффектов, возникающих при гармоническом возбуждении сдвиговой волны в стержневом твердотельном резонаторе с дислокационным гистерезисом и линейной диссипацией. Получены выражения для резонансной кривой, амплитудно-зависимых потерь и сдвига резонансных частот, а также для амплитуды волны на частоте третьей гармоники. Проведен графический и численный анализ полученных результатов.

Ключевые слова: нелинейные акустические волны, амплитудно-зависимое внутреннее трение, резонатор

DOI: 10.31857/S0320791925010037, EDN: BQZGNV

ВВЕДЕНИЕ

При распространении акустических (продольных и сдвиговых) первоначально гармонических волн в кристаллических твердых телах (металлах, сплавах и горных породах), содержащих дислокации, наблюдаются эффекты амплитудно-зависимого внутреннего трения (АЗВТ) — нелинейные потери и изменение скорости распространения [1–6], при этом имеет место нелинейное искажение волн и, соответственно, генерация их высших гармоник¹.

Явление АЗВТ объясняется в рамках гистерезисных уравнений состояния $\sigma = \sigma(\epsilon, \dot{\epsilon})$, где σ и ϵ — напряжение и деформация [1–6]. Проявления гистерезисных свойств среды зависят от амплитуды первоначально гармонической волны и

пройденного волной расстояния, и накапливаются в нелинейных (амплитудно-зависимых) искажениях и изменениях параметров волны по мере ее распространения. При слабом искажении первоначально гармонической волны, т.е. при малом уровне высших гармоник, площадь петель гистерезиса определяет нелинейные потери или декремент затухания (ДЗ) волны основной частоты, а среднее (по периоду волны) значение $\langle \sigma_\epsilon(\epsilon_m) - \sigma_\epsilon(0) \rangle$ — нелинейную поправку к скорости ее распространения или дефект модуля упругости (ДМУ), где ϵ_m — амплитуда деформации волны. При сильном же искажении первоначально гармонической волны, когда наиболее сильно проявляются эффекты АЗВТ, генерация высших гармоник приводит к дополнительным нелинейным потерям волны основной частоты и к изменению скорости ее распространения, так что в сильно-нелинейном режиме эффекты АЗВТ — ДЗ и ДМУ будут определяться другими (вообще говоря, неизвестными) выражениями, отличными от выражений для слабо-нелинейного режима.

К настоящему времени единственной микроскопической теорией, определяющей гистерезисное уравнение состояния кристаллических твердых тел, является дислокационная теория поглощения Гранато–Люкке [2, 3]. В этой теории гистерезис в уравнении состояния кристалла связывается с

¹ Распространение в нелинейных недиспергирующих средах двух коллинеарных интенсивных высокочастотных волн сопровождается генерацией не только их высших гармоник (еще более высокочастотных и сильнозатухающих с расстоянием), но и генерацией низкочастотной слабозатухающей волны разностной частоты. На этом эффекте основан предложенный В.А. Зверевым и А.И. Калачевым (в СССР) и П. Вестервельтом (в США) принцип работы параметрических излучающих и приемных гидроакустических антенн, обладающих, при малых размерах, высокой направленностью [7, 8].

отрывом сегментов дислокаций от примесных атомов (под действием внешнего динамического напряжения) и их различным поведением на стадиях нагрузки и разгрузки. Отметим, что для многих кристаллических твердых тел амплитудные зависимости эффектов АЗВТ не соответствуют гистерезису Гранато–Люкке, для которого имеет место экспоненциальная ($\propto \varepsilon_0^{-1} \exp(-A / \varepsilon_0)$, $A > 0$) зависимость ДЗ от амплитуды деформации ε_0 , создаваемой излучателем [2, 3]. В экспериментальных работах по АЗВТ в металлах (Cu, Zn, Pb), сплавах (Cu-Zn, Cu-Al, Cu-P) и горных породах (гранит, мрамор, известняк, магнезит, кварцит) наблюдались различные (степенные, с показателями степени p от 1 до 4 [6, 9–12] и экспоненциальные ($\propto \exp(-A / \varepsilon_m)$ [13], $\propto \varepsilon_m^{-1} \exp(-A / \varepsilon_m)$ [14]) зависимости ДЗ и ДМУ от амплитуды ε_m . Тем не менее, решение задачи о нелинейном распространении упругих волн в твердых телах с дислокационным гистерезисом Гранато–Люкке представляет определенный интерес, так как дает правильное качественное представление о нелинейных волновых процессах в подобных средах. Такое решение полезно в качестве “эталонного” при анализе и сравнении закономерностей нелинейных волновых процессов в твердых телах с другими видами гистерезисной нелинейности.

Более интенсивно, чем в безграничной среде, нелинейные волновые процессы протекают в резонаторе при его возбуждении на частоте, близкой к резонансной, когда в резонаторе устанавливается стоячая волна [15, 16]. В высокодобротных резонаторах амплитуда резонансных колебаний значительно превышает амплитуду колебаний

излучателя и может достигать достаточно высоких значений, при которых нелинейные акустические эффекты проявляются более заметно, чем в безграничной среде. В связи с этим, при проведении экспериментальных исследований эффектов АЗВТ часто применяются резонаторы [11, 12], так что для анализа и сравнения экспериментальных результатов с аналитическими необходимы расчетные формулы для нелинейных акустических эффектов в резонаторах с дислокационной гистерезисной нелинейностью.

В настоящей статье проводятся теоретические и численные исследования эффектов АЗВТ, возникающих при гармоническом резонансном возбуждении сдвиговой волны в стержневом твердотельном резонаторе (с жесткой и мягкой границами) с дислокационным гистерезисом Гранато–Люкке и линейной диссипацией. Методом возмущений получены и проанализированы выражения для резонансной кривой резонатора, нелинейных потерь и сдвига резонансных частот, а также для амплитуды волны на частоте третьей гармоники. Определены пределы применимости полученных выражений.

1. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ДИСЛОКАЦИОННЫМ ГИСТЕРЕЗИСОМ

Из дислокационной теории Гранато–Люкке [2, 3] следует, что гистерезисное уравнение состояния кристаллического твердого тела (для сдвиговых напряжений $\sigma = \sigma_{xy}$ и деформаций $\varepsilon = \varepsilon_{yx} = \partial U_y / \partial x$) имеет вид:

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = G_0[\varepsilon - f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})], \quad (1)$$

$$f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = D \begin{cases} [1 + (\varepsilon / \beta)] \exp(-\beta / \varepsilon), & \varepsilon \geq 0, \dot{\varepsilon} > 0 \quad - 1, \\ [1 + (\beta / \varepsilon_m)] (\varepsilon / \beta) \exp(-\beta / \varepsilon_m), & \varepsilon \geq 0, \dot{\varepsilon} < 0 \quad - 2, \\ -[1 - (\varepsilon / \beta)] \exp(\beta / \varepsilon), & \varepsilon \leq 0, \dot{\varepsilon} < 0 \quad - 3, \\ [1 + (\beta / \varepsilon_m)] (\varepsilon / \beta) \exp(-\beta / \varepsilon_m), & \varepsilon \leq 0, \dot{\varepsilon} > 0 \quad - 4, \end{cases} \quad (2)$$

где x и y — декартовы координаты, $U_y = U$ — y -компонента сдвигового смещения, $G_0 = G / (1 + QG)$, $D = \gamma^3 \Gamma Q / 3!$, $\gamma = L_N / L_c \gg 1$, $\Gamma = \pi f_m / 4aL_c$, $f_m \approx U_0 / a$, $Q = 48a^2 \Lambda L_c^2 / \pi^4 C = 24(1 - \nu) \Lambda L_c^2 / \pi^3 G$, $C = 2Ga^2 / \pi(1 - \nu)$, $\beta = \Gamma / G_0$, G — модуль сдвига кристалла без дислокаций, a — модуль вектора Бюргерса, U_0 — энергия связи дислокации с примесным атомом, Λ — плотность дислокаций, L_c — расстояние между примесными атомами вдоль оси дислокации, L_N — длина дислокации, ν — коэффициент Пуассона, $|f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})| \ll |\varepsilon| \ll 1$, $f(\varepsilon = 0, \dot{\varepsilon}) = 0$, $\varepsilon_m / \beta < 1$, ε_m — амплитуда деформации. (Аналогичный гистерезис имеет место и для продольных напряжений и деформаций.)

В гистерезисе (2) нелинейные по деформации ε нагрузочные ветви (1 и 3) не зависят от амплитуды ε_m , а разгрузочные ветви (2 и 4) — линейны по деформации ε и нелинейны по амплитуде ε_m . Отметим, что в выражении (2) амплитуда ε_m не является амплитудой деформации ε_0 , заданной на границе твердого тела, т.е. $\varepsilon_m \neq \varepsilon_0$ (как в [2, 3]). Амплитуда ε_m определяется максимальной деформацией среды, так что при распространении упругой волны вдоль оси x , вследствие нелинейного затухания, ее амплитуда ε_m будет уменьшаться, поэтому $\varepsilon_m = \varepsilon_m(\varepsilon_0, x) \neq \varepsilon_0$. В резонаторе же амплитуда $\varepsilon_m = \varepsilon_m(\varepsilon_0, x)$, кроме ε_0 , зависит от формы колебания, координаты x , добротности резонатора и частотной расстройки от соответствующего резонанса.

2. НЕЛИНЕЙНОЕ ВОЛНОВОЕ
УРАВНЕНИЕ ДЛЯ РЕЗОНАТОРА
С ДИСЛОКАЦИОННЫМ ГИСТЕРЕЗИСОМ
И ЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Подставляя уравнение состояния (1) в уравнение движения $\rho U_{tt} = \sigma_x(\epsilon, \dot{\epsilon})$ [17, 18], и учитывая линейную диссипацию материала резонатора, получим волновое уравнение для сдвиговых смещений $U(x, t)$:

$$U_{tt} - C_{sh}^2 U_{xx} = -C_{sh}^2 [f(\epsilon, \dot{\epsilon})]_x + \alpha U_{xxt}, \quad (3)$$

где $C_{sh} = (G / \rho)^{1/2}$ — линейная скорость сдвиговой волны, α — коэффициент линейной диссипации, ρ — плотность.

Граничные условия для сдвиговых смещений U и напряжений σ в резонаторе с жесткой ($x = 0$) и мягкой ($x = L$) границами имеют вид [18]:

$$U(x = 0, t) = A_0 \cos \Omega t, \quad \sigma(\epsilon, \dot{\epsilon})|_{x=L} = 0, \quad (4)$$

где A_0 и Ω — амплитуда и частота возбуждения резонатора, L — длина резонатора.

Из уравнения состояния (1) следует, что условие для напряжения на мягкой границе $\sigma(\epsilon, \dot{\epsilon})|_{x=L} = 0$ эквивалентно условию: $\epsilon(x = L, t) = \partial U(x = L, t) / \partial x = 0$. Резонансные частоты Ω_p , добротности Q_p и волновые числа K_p такого резонатора определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \Omega_p &= C_{sh} K_p = \pi C_{sh} (2p - 1) / 2L, \\ Q_p &= \mu_p^{-1} = C_{sh}^2 / \alpha \Omega_p, \\ K_p &= \pi (2p - 1) / 2L, \end{aligned} \quad (5)$$

где p — номер моды, $p = 1, 2, 3, \dots$

Вообще говоря, при “сдвиговом” возбуждении стержневого резонатора в нем, кроме сдвиговых колебаний, возможно возбуждение и колебаний изгибных [17]. Чтобы возбуждение изгибных колебаний было неэффективным, необходимо, чтобы частота возбуждения резонатора Ω была близка к резонансной частоте Ω_p сдвиговых колебаний, а резонансные частоты $\tilde{\Omega}_n$ изгибных колебаний резонатора (n — номер изгибной моды) были много меньше Ω_p . Для резонансной частоты изгибных колебаний $\tilde{\Omega}_1 \approx (1,76 C_{sh} R) / L^2$ на первой моде ($n = 1$) [17] из условия $\tilde{\Omega}_1 \ll \Omega_p$ следует, что $R / L \ll 1$, где R — радиус стержня.

Для решения уравнения (3) с граничными условиями (4) используем замену:

$$V(x, t) = U(x, t) - A_0 \cos \Omega t, \quad (6)$$

при которой граничные условия для $V(x, t)$ становятся нулевыми:

$$V(x = 0, t) = 0, \quad \partial V(x = L, t) / \partial x = 0.$$

Будем рассматривать вынужденные колебания резонатора вблизи резонанса моды с номером p , когда $|U(x, t)|, |V(x, t)| \gg A_0$. Подставляя (6) в (3), получим волновое уравнение для $V(x, t)$, в правой части которого находятся слагаемые, учитывающие нелинейность, линейную диссипацию и внешнюю силу:

$$\begin{aligned} V_{tt} - C_{sh}^2 V_{xx} &= -C_{sh}^2 [f(V_x, V_{xt})]_x + \\ &+ \alpha V_{xxt} + A_0 \Omega^2 \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (7)$$

Считая эти слагаемые малыми, будем искать решение уравнения (7) методом возмущений, в виде, близком к решению однородного уравнения:

$$V(x, t) = V_1(x, t) + W(x, t), \quad (8)$$

где $V_1(x, t) = V_0 \sin K_p x \cos \vartheta$, $W(x, t) = \sum_{n=2}^{\infty} V^{(n)}(x, t) = \sum_{n=2}^{\infty} V_n(x) \sin(n\vartheta + \phi_n)$ — малая поправка, связанная

с нелинейностью резонатора, $|W(x, t)| \ll |V_1(x, t)|$, $|W_x(x, t)| \ll |V_{1x}(x, t)|$, $W(x = 0, t) = W_x(x = L, t) = 0$, $\vartheta = (\Omega_p + \delta)t + \phi_1$, V_0 и ϕ_1 — амплитуда и фаза колебаний на частоте Ω , $V_n(x)$ и ϕ_n — амплитуда и фаза колебаний на частоте $n\Omega$, $\delta_p = \Omega - \Omega_p$, $|\delta_p| \ll \Omega_p / p$. Вследствие нечетной нелинейности гистерезисной функции $[f(\epsilon, \dot{\epsilon}) = -f(-\epsilon, \dot{\epsilon})]$, в резонаторе будут генерироваться вторичные волны только на нечетных гармониках первоначально гармонической волны, самой сильной из них будет третья.

Из выражения (8) следует, что:

$$\begin{aligned} \epsilon(x, t) &= \epsilon_1(x, t) + W_x(x, t) = \\ &= \epsilon_m \cos K_p x \cos \vartheta + \sum_{n=2}^{\infty} V_{nx}(x) \sin(n\vartheta + \phi_n), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\epsilon_1(x, t) = V_{1x}(x, t) = \epsilon_m \cos K_p x \cos \vartheta$, $\epsilon_m \equiv V_0 K_p$ — амплитуда деформации в резонаторе, при этом амплитуда деформации $\epsilon_m(x)$ в уравнении (2) определяется выражением $\epsilon_m(x) = \epsilon_m |\cos K_p x|$.

Подставляя (8), (9) в (7), получим неоднородное уравнение для $W(x, t)$, удовлетворяющее нулевым граничным условиям $W(x = 0, t) = W_x(x = L, t) = 0$:

$$\begin{aligned} W_{tt} - C_{sh}^2 W_{xx} &= -C_{sh}^2 [f(\epsilon, \dot{\epsilon})]_x + \\ &+ \alpha \Omega_p K_p^2 V_0 \sin K_p x \sin \vartheta + \\ &+ 2\delta \Omega_p V_0 \sin K_p x \cos \vartheta + \\ &+ A_0 \Omega_p^2 \cos(\vartheta - \phi_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Чтобы решение этого уравнения не нарастало во времени, должно выполняться условие ортогональности его правой части собственным

функциям $\sin K_p x$ оператора, стоящего в левой части. Это эквивалентно отсутствию в правой части уравнения (10) фурье-компонент с частотой Ω и волновым числом K_p . Приравнивая к нулю соответствующие фурье-компоненты правой части уравнения (10), получим уравнения для амплитуды и фазы стационарных колебаний в резонаторе на частоте Ω :

$$\begin{aligned} & \frac{2\beta D}{\pi \varepsilon_m} \int_0^1 \frac{\arccos z}{z} \exp\left(-\frac{\beta}{\varepsilon_m z}\right) dz + \\ & + \frac{\pi \alpha \Omega_p \varepsilon_m}{2C_{sh}^2} = -\frac{2A_0 \Omega_p \sin \phi_1}{(2p-1)C_{sh}}, \\ & \int_0^1 \left[\frac{4Dz}{\pi(1+z)} \left(\frac{\varepsilon_m z}{\beta} + 1\right) K\left(\frac{1-z}{1+z}\right) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\varepsilon_m z}{\beta} + 1 + \frac{\beta}{2\varepsilon_m z}\right) \arcsin z \right] \exp\left(-\frac{\beta}{\varepsilon_m z}\right) dz + \\ & + \frac{\pi D}{4} \left(\frac{\varepsilon_m}{\beta} + 1\right) \exp\left(-\frac{\beta}{\varepsilon_m}\right) + \\ & + \frac{\pi \varepsilon_m \delta}{\Omega_p} = -\frac{2A_0 \Omega_p \cos \phi_1}{(2p-1)C_{sh}}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $K(z) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-z^2 \sin^2 \phi}}$ — полный эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода.

3. ЭФФЕКТЫ АЗВТ И АМПЛИТУДА ТРЕТЬЕЙ ГАРМОНИКИ

Из уравнений (11) получаем выражения для резонансной кривой $\varepsilon_m = \varepsilon_m(\varepsilon_0, \Delta_p)$ резонатора, амплитудно-зависимых потерь $\mu_{p,nl}(\varepsilon_m)$ и относительного сдвига резонансной частоты $\Delta_{p,nl}(\varepsilon_m) = \delta_{p,nl}(\varepsilon_m) / \Omega_p$:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_m(\varepsilon_0, \Delta_p) = \\ & = \frac{\varepsilon_0}{\{[\Delta_p - \Delta_{p,nl}(\varepsilon_m)]^2 + [\mu_p + \mu_{p,nl}(\varepsilon_m)]^2 / 4\}^{1/2}}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mu_{p,nl}(\varepsilon_m) = \frac{4\beta D}{\pi^2 \varepsilon_m^2} \int_0^1 \exp\left(-\frac{\beta}{\varepsilon_m z}\right) \frac{\arccos z dz}{z}, \quad (13)$$

$$\Delta_{p,nl}(\varepsilon_m) = -\frac{2D}{\pi \varepsilon_m} \left\{ \frac{\pi}{4} \left(\frac{\varepsilon_m}{\beta} + 1\right) \exp\left(-\frac{\beta}{\varepsilon_m}\right) - \right. \quad (14)$$

$$\left. - \int_0^1 \left[\left(\frac{\varepsilon_m z}{\beta} + 1 + \frac{\beta}{2\varepsilon_m z}\right) \arcsin z - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{4z}{\pi(1+z)} \left(\frac{\varepsilon_m z}{\beta} + 1\right) K\left(\frac{1-z}{1+z}\right) \right] \exp\left(-\frac{\beta}{\varepsilon_m z}\right) dz \left. \right\},$$

где $\varepsilon_0 = A_0 / L$, $\mu_p = \alpha \Omega_p / C_{sh}^2 = Q_p^{-1}$, $\Delta_p = \delta_p / \Omega_p$.

Аналогично находим амплитуду $\varepsilon_3(\varepsilon_m)$ третьей гармоники при $\Delta_p = \Delta_{p,nl}(\varepsilon_m)$:

$$\varepsilon_3(\varepsilon_m) = \frac{\sqrt{a_3^2(\varepsilon_m) + b_3^2(\varepsilon_m)}}{[4\Delta_{p,nl}^2(\varepsilon_m) + 9\mu_p^2]^{1/2}} \ll \varepsilon_m(\varepsilon_0), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} a_3(\varepsilon_m) &= \frac{192D}{\pi^2} \int_0^1 z(1+z) \left[E\left(\frac{1-z}{1+z}\right) - \right. \\ & \left. - \frac{9+40z^2}{12(1+z)^2} K\left(\frac{1-z}{1+z}\right) \right] \left(1 + \frac{\varepsilon_m z}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{\beta}{\varepsilon_m z}\right) dz, \\ b_3(\varepsilon_m) &= \frac{8D}{\pi^2} \int_0^1 \left[\frac{(1-16z^2)\arccos z}{3} + \right. \\ & \left. + \frac{20z\sqrt{1-z^2}}{3} + \frac{z}{2\sqrt{1-z^2}} \right] \left(1 + \frac{\varepsilon_m z}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{\beta}{\varepsilon_m z}\right) dz, \\ E(z) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \phi} d\phi. \end{aligned}$$

В резонансе, т.е. при $\Delta_p = \Delta_{p,nl}(\varepsilon_m)$, из выражения (12) получаем:

$$\varepsilon_m(\varepsilon_0) = \frac{2Q_p \varepsilon_0}{1 + Q_p \mu_{p,nl}(\varepsilon_m)}. \quad (16)$$

Из этого выражения следует, что при малых ε_m , когда $Q_p \mu_{p,nl}(\varepsilon_m) \ll 1$, $\varepsilon_m(\varepsilon_0) = 2Q_p \varepsilon_0$, а при больших ε_m , когда $Q_p \mu_{p,nl}(\varepsilon_m) \gg 1$, амплитуда ε_m определяется из уравнения: $\varepsilon_m(\varepsilon_0) \mu_{p,nl}(\varepsilon_m) = 2\varepsilon_0$.

При $\varepsilon_m / \beta \ll 1$ из выражений (13)–(15) получаем:

$$\begin{aligned} \mu_{p,nl}(\varepsilon_m) &\approx \frac{4D}{\pi \sqrt{2\pi\beta\varepsilon_m}} \left(1 - \frac{17\varepsilon_m}{8\beta}\right) \exp\left(-\frac{\beta}{\varepsilon_m}\right), \\ \Delta_{p,nl}(\varepsilon_m) &\approx -D \sqrt{\frac{1}{2\pi\beta\varepsilon_m}} \left(1 + \sqrt{\frac{8\varepsilon_m}{\pi\beta}} - \frac{\varepsilon_m}{8\beta}\right) \exp\left(-\frac{\beta}{\varepsilon_m}\right), \\ r(\varepsilon_m) &= \frac{\mu_{p,nl}(\varepsilon_m)}{|\Delta_{p,nl}(\varepsilon_m)|} \approx \frac{4}{\pi} \left(1 - \sqrt{\frac{8\varepsilon_m}{\pi\beta}} - \frac{2\varepsilon_m}{\beta}\right), \quad (17) \\ a_3(\varepsilon_m) &\approx -\frac{4D}{\pi} \left(\frac{\varepsilon_m}{\beta}\right) \left(1 - \frac{67\varepsilon_m}{2\beta}\right) \exp\left(-\frac{\beta}{\varepsilon_m}\right), \\ b_3(\varepsilon_m) &\approx D \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{\beta}} \left(1 + \frac{77\varepsilon_m}{24\beta}\right) \exp\left(-\frac{\beta}{\varepsilon_m}\right). \end{aligned}$$

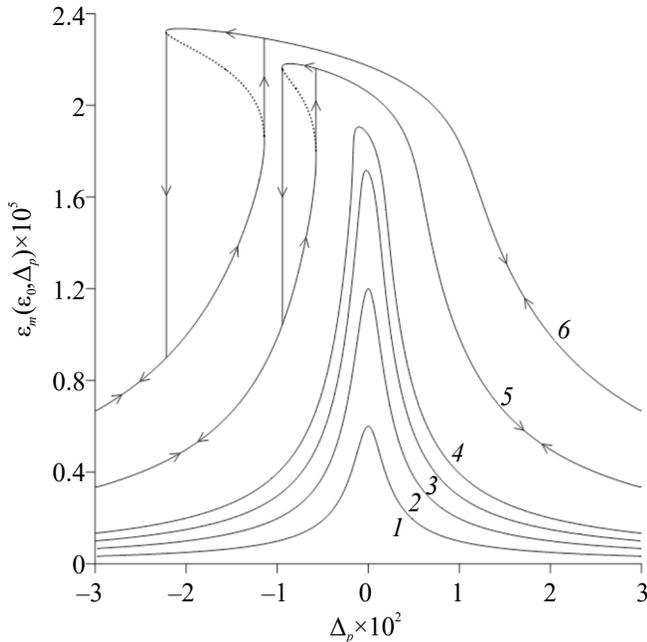


Рис. 1. Резонансные кривые резонатора при $Q_p = 300$, $D = 1$, $\beta = 3 \times 10^{-4}$ и различных значениях амплитуды ϵ_0 : линия 1 — $\epsilon_0 = 10^{-8}$, 2 — $\epsilon_0 = 2 \times 10^{-8}$, 3 — $\epsilon_0 = 3 \times 10^{-8}$, 4 — $\epsilon_0 = 4 \times 10^{-8}$, 5 — $\epsilon_0 = 10^{-7}$, 6 — $\epsilon_0 = 2 \times 10^{-7}$. Пунктирные линии на резонансных кривых 5, 6 не реализуются, т.к. соответствуют неустойчивым колебаниям резонатора.

На рис. 1 приведены резонансные кривые резонатора, т.е. зависимости $\epsilon_m = \epsilon_m(\epsilon_0, \Delta_p)$, при $Q_p = 300$, $D = 1$, $\beta = 3 \times 10^{-4}$ и различных значениях амплитуды ϵ_0 . Из рис. 1 видно, что с ростом ϵ_0 амплитуда ϵ_m также растет, при этом форма резонансной кривой изменяется. В начале, при $\epsilon_0 \leq 3 \times 10^{-8}$, когда влияние нелинейности незначительно, резонансная кривая является однозначной и симметричной (относительно линии $\Delta_p = 0$) — она практически не расширяется и не сдвигается по частоте. Затем, при $\epsilon_0 > 3 \times 10^{-8}$, резонансная кривая несимметрично расширяется и ее максимум сдвигается вниз по частоте, а при $\epsilon_0 > 4 \times 10^{-8}$ она становится неоднозначной. Здесь, как и для осциллятора с упругой кубической нелинейностью [16, 19–21], имеет место гистерезис в зависимости амплитуды ϵ_m от частотной расстройки Δ_p , при этом ϵ_m зависит от направления изменения Δ_p . Так, при $\epsilon_0 = 2 \times 10^{-7}$ (кривая 6), при уменьшении Δ_p амплитуда ϵ_m вначале непрерывно растет, а затем (при $\Delta_p \approx -2.2 \times 10^{-2}$) скачкообразно уменьшается; при увеличении же Δ_p амплитуда ϵ_m вначале также непрерывно растет, а при $\Delta_p \approx -1.2 \times 10^{-2}$ — скачкообразно увеличивается. (Аналогично изменяется амплитуда ϵ_m и для резонансной кривой 5.)

Следует иметь в виду, что выражения (12)–(17) справедливы только при выполнении условия: $\epsilon_3(\epsilon_m) \ll \epsilon_m(\epsilon_0)$, что и отражено на рис. 2, на котором приведены графики зависимостей $\epsilon_m(\epsilon_0)$ и $\epsilon_3(\epsilon_0)$ от ϵ_0 при $D = 1$ и $\Delta_p = \Delta_{p,nl}(\epsilon_m)$. Из рис. 2

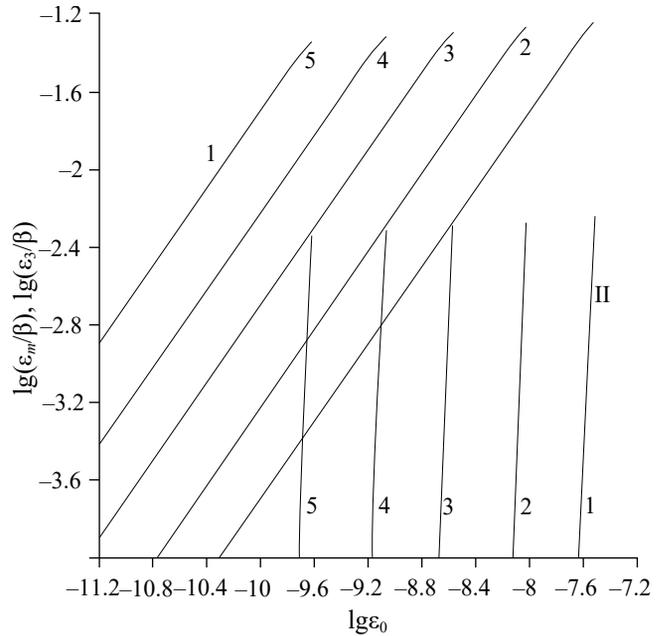


Рис. 2. Графики зависимостей ϵ_m/β — I и ϵ_3/β — II от ϵ_0 при $\Delta_p = \Delta_{p,nl}(\epsilon_m)$, $D = 1$ и различных значениях параметра Q_p/β : линии 1 — $Q_p/\beta = 10^6$, 2 — $Q_p/\beta = 3 \times 10^6$, 3 — $Q_p/\beta = 10^7$, 4 — $Q_p/\beta = 3 \times 10^7$, 5 — $Q_p/\beta = 10^8$.

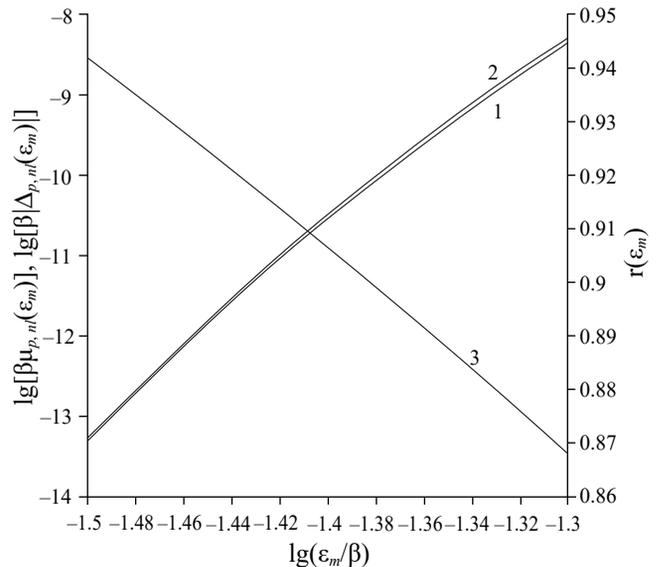


Рис. 3. Графики зависимостей $\beta \mu_{p,nl}(\epsilon_m) - 1$, $\beta |\Delta_{p,nl}(\epsilon_m)| - 2$ и отношения $r(\epsilon_m) - 3$ от ϵ_m/β при $D = 1$ и $\Delta_p = \Delta_{p,nl}(\epsilon_m)$.

видно, что в зависимостях $\epsilon_m = \epsilon_m(\epsilon_0)$ имеют место два разных участка: в начале, при малых ϵ_0 — $\epsilon_m(\epsilon_0) \propto \epsilon_0$, а затем проявляется тенденция к насыщению. С ростом амплитуды ϵ_0 (и параметра Q_p/β) амплитуда $\epsilon_3(\epsilon_0)$ третьей гармоники быстро растет: $\epsilon_3(\epsilon_0) \propto \exp(-\beta/\epsilon_m)$ и при $\lg(\epsilon_m/\beta) \approx -1.3$ (т.е. при $\epsilon_m/\beta \approx 5 \times 10^{-2}$) достигает значений, при которых нарушается условие $\epsilon_3(\epsilon_m) \ll \epsilon_m(\epsilon_0)$. Таким образом, выражения (12)–(17) справедливы при $\epsilon_m/\beta \leq 5 \times 10^{-2}$. На рис. 3 приведены графики

зависимостей $\beta \mu_{p,nl}(\epsilon_m)$, $\beta |\Delta_{p,nl}(\epsilon_m)|$ и отношения $r(\epsilon_m) = \mu_{p,nl}(\epsilon_m) / |\Delta_{p,nl}(\epsilon_m)|$ от ϵ_m / β при $D = 1$ и $\Delta_p = \Delta_{p,nl}(\epsilon_m)$. Здесь, с ростом ϵ_m / β (от 3.1×10^{-2} до 5×10^{-2}) значения $\beta \mu_{p,nl}(\epsilon_m)$ и $\beta |\Delta_{p,nl}(\epsilon_m)|$ быстро растут, причем $\mu_{p,nl}(\epsilon_m) < \Delta_{p,nl}(\epsilon_m)$, а отношение $r(\epsilon_m)$ уменьшается с 0.94 до 0.87.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведены теоретические и численные исследования нелинейных эффектов АЗВТ в стержневом резонаторе с дислокационным гистерезисом Гранато–Люкке и линейной диссипацией при возбуждении в нем упругой сдвиговой гармонической волны. Методом возмущений получены выражения для резонансной кривой резонатора, нелинейных потерь $\mu_{p,nl}(\epsilon_m)$ и относительного сдвига резонансной частоты $|\Delta_{p,nl}(\epsilon_m)|$, а также для их отношения $r(\epsilon_m) = \mu_{p,nl}(\epsilon_m) / |\Delta_{p,nl}(\epsilon_m)|$ и амплитуды $\epsilon_3(\epsilon_m)$ третьей гармоники. Показано, что полученные выражения верны при $\epsilon_m / \beta \leq 5 \times 10^{-2}$, при этом с ростом амплитуды ϵ_0 и параметра Q_p / β значения $\epsilon_m(\epsilon_0) / \beta$, $\mu_{p,nl}(\epsilon_m)$, $|\Delta_{p,nl}(\epsilon_m)|$ и $\epsilon_3(\epsilon_0) / \beta$ растут, а отношение $r(\epsilon_m / \beta)$ (при $3.1 \times 10^{-2} \leq \epsilon_m / \beta \leq 5 \times 10^{-2}$) уменьшается от 0.94 до 0.87.

В заключение отметим, что знание установленных закономерностей нелинейных акустических эффектов, связанных с дислокационным гистерезисом Гранато–Люкке, необходимо при анализе результатов экспериментальных исследований АЗВТ в резонаторах из различных кристаллических твердых тел с целью изучения нелинейной динамики дислокаций, построения феноменологических уравнений состояния кристаллов, определения механизмов их гистерезисной нелинейности и развития методов нелинейной акустической диагностики.

Работа выполнена в рамках Госзадания ИПФ РАН по темам № FFUF-2024-0035 и № FFUF-2022-0005.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Давиденков Н.Н. О рассеянии энергии при вибрациях // ЖТФ. 1938. Т. 8. № 6. С. 483–499.
2. Granato A.V., Lucke K. Theory of mechanical damping due to dislocations // J. Appl. Phys. 1956. V. 27. № 5. P. 583–593.
3. Ультразвуковые методы исследования дислокаций // Сб. статей. Пер. с англ. и нем. под ред. Меркулова Л.Г. М.: ИИЛ, 1963. 376 с.
4. Физическая акустика // Под ред. Мезона У. Т. 4. Часть А. Применения физической акустики в квантовой физике и физике твердого тела. М.: Мир, 1969. 375 с.
5. Asano S. Theory of nonlinear damping due to dislocation hysteresis // J. Phys. Soc. Jap. 1970. V. 29. P. 952–963.
6. Лебедев А.Б. Амплитудно-зависимый дефект модуля упругости в основных моделях дислокационного гистерезиса // ФТТ. 1999. Т. 41. № 7. С. 1214–1221.
7. Зверев В.А. Как зарождалась идея параметрической акустической антенны // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 5. С. 685–692.
8. Westervelt P.J. Parametric acoustic array // J. Acoust. Soc. Am. 1963. V. 35. № 4. P. 535–537.
9. Takahachi S. Internal friction and critical stress of copper alloys // J. Phys. Soc. Jap. 1956. V. 11. № 12. P. 1253–1261.
10. Novick A.S. Variation of amplitude-dependent internal friction in single crystals of copper with frequency and temperature // Phys. Rev. 1950. V. 80. № 2. P. 249–257.
11. Nazarov V.E., Radostin A.V. Nonlinear Wave Processes in Elastic Micro-inhomogeneous Solids. Wiley, 2015. 251 p.
12. Назаров В.Е., Колпаков А.Б. Влияние сильной волны накачки на слабую пробную волну в резонаторе из отожженной поликристаллической меди // Известия ВУЗов. Радиофизика. 2024. Т. LXVII. № 8. С. 694–707.
13. Beshers D.N. Internal friction of copper and copper alloys // J. Appl. Phys. 1959. V. 30. № 2. P. 252–258.
14. Ниблетт Д., Уилкс Дж. Внутреннее трение в металлах, связанное с дислокациями // Успехи физ. наук. 1963. Т. 80. № 1. С. 125–187.
15. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
16. Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. М.: Физматлит, 2008. 496 с.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
18. Исакович М.И. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
19. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 2001. 224 с.
20. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
21. Руденко О.В., Хедберг К.М., Энфло Б.О. Стоячие акустические волны конечной амплитуды в кубично нелинейной среде // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 4. С. 522–532.

Nonlinear Acoustic Effects in a Resonator with Dislocation Hysteresis and Linear Dissipation

V. E. Nazarov, S. B. Kiyashko

*A.V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences, Ulyanova 46,
Nizhny Novgorod, 603950 Russia*

A theoretical study of nonlinear acoustic effects arising from harmonic excitation of a rod resonator with dislocation hysteresis of Granato-Lucke and linear dissipation has been carried out using the perturbation method. Expressions for the resonance curve, nonlinear losses, and shift of the resonant frequencies and the amplitude of the third harmonic are obtained. A graphical and numerical analysis of the obtained results is carried out.

Keywords: nonlinear acoustic waves, amplitude-dependent internal friction, resonator