

УДК 534.222

## НЕЛИНЕЙНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ НИЗКОЧАСТОТНОГО ПОЛЯ ДИФРАГИРУЮЩИМИ ПУЧКАМИ ВОЛН ВЫСОКИХ ЧАСТОТ

© 2025 г. О. В. Руденко<sup>a,b,c,\*</sup>

<sup>a</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Физический факультет

<sup>b</sup>Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН

<sup>c</sup>Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН

\*e-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 25.06.2024 г.

После доработки 25.06.2024 г.

Принята к публикации 24.12.2024 г.

Изложена универсальная теория “параметрических” излучателей звука, учитывающая затухание и дифракцию взаимодействующих волн в квазиоптическом приближении. Приведены выражения, описывающие структуру низкочастотного поля, возбуждаемого волнами высоких частот с произвольными распределениями амплитуд и фаз на поверхности преобразователей накачки. Даны универсальные формулы для расчета диаграмм направленности. Описана динамика формирования диаграмм. Изложены результаты расчета режима сильно искаженных волн накачки, содержащих ударные фронты.

**Ключевые слова:** нелинейная генерация, низкие частоты, дифрагирующие пучки, диаграмма направленности

**DOI:** 10.31857/S0320791925010055, **EDN:** BQUNEM

### ВВЕДЕНИЕ

В 2024 г. исполнилось 100 лет со дня рождения выдающегося ученого в области прикладной физики, акустики и радиофизики Виталия Анатольевича Зверева. Он совсем немного не дожид до этой юбилейной даты. Среди многочисленных работ В.А. Зверева особое место занимает изобретение им генератора разностной частоты, известного среди акустиков как “параметрический излучатель” (ПИ). До сих пор эти приборы остаются в числе наиболее “ярких” приложений нелинейной акустики. Работы по ПИ составили его основной вклад в цикл “Разработка физических основ нелинейной акустики и ее приложений”, удостоенный Государственной премии СССР в 1985 г.

Для расчета ПИ используется теория взаимодействия дифрагирующих акустических волн. Идея ПИ опубликована П. Вестервельтом [1] и независимо высказана В.А. Зверевым и А.И. Калачевым [2]. Непростая история, связанная с приоритетом, отражена в статье [3]. Подробное изложение результатов, полученных до 1980 г., дано в монографии [4]. Большой вклад в отечественные прикладные исследования внесли сотрудники Таганрогского радиотехнического института (группа В.И. Тимошенко).

В простейшем случае ПИ состоит из первичного преобразователя (обычного излучателя звука),

генерирующего высокочастотные волны “накачки” большой интенсивности, и протяженного участка нелинейной среды. В приложениях гидроакустики этот “столб” воды может быть длиной в десятки и сотни метров. В этом “столбе” возбуждается низкочастотная волна и формируется ее диаграмма направленности. С помощью ПИ, например, на частотах в несколько кГц удается создать пучки с очень узкой диаграммой шириной  $1^\circ$ – $5^\circ$  при небольших размерах первичного преобразователя порядка десятков см. Для формирования таких диаграмм обычными излучателями требуются антенны с диаметром зеркала порядка 10 м.

Преимуществами ПИ являются малогабаритность, возможность плавной перестройки частоты (в пределах резонансной кривой преобразователя), практически полное отсутствие боковых лепестков, легкость в управлении другими пространственными и временными характеристиками. Гидроакустические ПИ используются в измерительных целях, для калибровки многокомпонентных антенн; для профилирования дна и осадочных слоев, обнаружения предметов под дном [5]; для снятия частотной характеристики цели и классификации объектов [6]; для рыболокации мелких косяков и отдельных рыб [7]; для акустической связи на мелководных участках акватории в условиях донной и поверхностной реверберации [7];

в доплеровских лагах для абсолютного измерения скорости судна [8].

Заметим, что термин “параметрический”, привычный для акустиков, не соответствует принятому в физике. Обычно параметрическими называют колебательные и волновые системы с параметрами, изменяющимися во времени благодаря притоку энергии извне. Параметрический процесс является пороговым и развивается по экспоненте при его превышении. Здесь же правильнее говорить не “параметрический излучатель”, а генератор разностных (низких) частот.

Многочисленные теоретические работы, посвященные ПИ, можно разделить на две группы [9, 10]. Первая группа развивает подход и результаты Вестервелта [1]. Ко второй относятся работы, использующие упрощенные уравнения нелинейной акустики ограниченных пучков (уравнение Хохлова–Заболотской (ХЗ) и его модификации). Метод предложен в работах [11, 12]. С его помощью удалось довольно просто получить известные результаты и полностью описать картину формирования характеристик ПИ. Эта универсальная теория оказалась полезной в инженерных расчетах, при конструировании отечественных приборов типа НАИ и ПГЛ [13].

## 1. МЕТОД РАСЧЕТА ПИ

### В КВАЗИОПТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

Воспользуемся уравнением Хохлова–Заболотской–Кузнецова (ХЗК), записанным для акустического давления [4]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{b}{2c^3 \rho} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \right] = \frac{c}{2} \Delta_{\perp} p. \quad (1)$$

Здесь координата  $x$  направлена вдоль оси пучка, лапласиан  $\Delta_{\perp}$  действует на координаты в поперечном сечении,  $\tau = t - x/c$  — время в системе, движущейся вместе с волной со скоростью звука  $c$ . Числа  $\varepsilon$  и  $b$  — параметры нелинейности и диссипации,  $\rho$  — плотность среды.

В большинстве случаев ПИ работает при интенсивностях ниже порога образования разрыва. Эти режимы можно рассчитывать, решая (1) методом последовательных приближений. Генерация низкочастотного спектра сильно искаженными волнами накачки обсуждается ниже в разделе 4.

$$P_{-} = -\frac{\varepsilon K^2}{2c^2 \rho} \int_0^x \frac{\exp(-\alpha x')}{x-x'} dx' \int_0^{\infty} p_1 p_2^* \exp\left(-\frac{i}{2} K \frac{r^2 + r'^2}{x-x'}\right) J_0\left(\frac{K r r'}{x-x'}\right) r' dr'. \quad (8)$$

Решение (6), (8) справедливо для произвольных  $p_1$ ,  $p_2$ , т.е. для различных распределений действительных амплитуд и фаз на поверхности преобразователя накачки.

Пусть преобразователь излучает в среду бигармонический сигнал с близкими частотами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ . В первом приближении для круглых в поперечном сечении пучков решение имеет вид:

$$p^{(1)} = \frac{1}{2} p_1(r, x) \exp(-\alpha_1 x + i\omega_1 \tau) + \frac{1}{2} p_2(r, x) \exp(-\alpha_2 x + i\omega_2 \tau) + c.c. \quad (2)$$

где  $\alpha_{1,2} = b\omega_{1,2}^2 / 2c^3 \rho$  — коэффициенты затухания волн накачки. Комплексные амплитуды  $p_{1,2}$  высокочастотных волн удовлетворяют параболическим уравнениям:

$$2ik_{1,2} \frac{\partial p_{1,2}}{\partial x} = \frac{\partial^2 p_{1,2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_{1,2}}{\partial r}. \quad (3)$$

Здесь  $k_{1,2} = \omega_{1,2} / c$ . Вводя во втором приближении комплексную амплитуду волны разностной частоты  $\Omega = \omega_1 - \omega_2$  (ВРЧ):

$$p^{(2)} = \frac{1}{2} P_{-}(r, x) \exp(-\alpha x + i\Omega \tau) + c.c., \quad (4)$$

получим для нее неоднородное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{-}}{\partial x} - \frac{1}{2iK} \left( \frac{\partial^2 P_{-}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_{-}}{\partial r} \right) = \\ = i \frac{\varepsilon \Omega}{2c^3 \rho} p_1 p_2^* \exp(-\alpha_{-} x) = Q(r, x). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $K = \Omega / c$ ,  $\alpha_{-} = b\Omega^2 / 2c^3 \rho$ ,  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_{-} = 2 / L_{DIS}$  — эффективный коэффициент затухания.

При решении (5) удобно воспользоваться интегральным преобразованием Ханкеля [4]. Решение имеет вид:

$$P_{-} = \int_0^{\infty} J_0(vr) v dv \int_0^x \tilde{Q}(v, x') \exp\left[i \frac{v^2}{2K} (x - x')\right] dx', \quad (6)$$

где

$$\tilde{Q} = i \frac{\varepsilon K}{2c^2 \rho} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha x) p_1 p_2^* J_0(vr) r dr. \quad (7)$$

— преобразованная по Ханкелю правая часть уравнения (5). Удобно представить (6) и в другой форме:

Выражения (6), (8) позволяют совершить предельный переход к дальней зоне и определить в общем виде основную характеристику ПИ — форму диаграммы направленности.

Пусть функция  $\tilde{Q}$  (7), определяющая плотность источников ВРЧ, заметно отличается от нуля лишь при  $x < L$ . В качестве “длины антенны”  $L$  может выступать расстояние  $L_{DIS}$ , на котором происходит затухание волн накачки, либо характерная длина нелинейного поглощения, либо длина области взаимодействия, ограниченной фильтром (непрозрачным для высоких частот). Тогда в интеграл (6) наибольший вклад даст область  $x < L$ . Если

$$\tilde{Q}\left(v, -\frac{v^2}{2K}\right) = \int_0^\infty \tilde{Q}(v, r) \exp\left(-i\frac{v^2}{2K}x\right) dx = \int_0^\infty dx \int_0^\infty \tilde{Q}(x, r) \exp\left(-i\frac{v^2}{2K}x\right) J_0(vr) r dr \quad (10)$$

— правая часть (5), дважды преобразованная: по Фурье и по Ханкелю. Пользуясь универсальной асимптотической формулой для перехода в дальнюю зону (см. [4]), получим

$$P_- = i\frac{K}{x} \exp\left(-i\frac{Kr^2}{2x}\right) \tilde{Q}\left(K\frac{r}{x}, -\frac{K}{2}\frac{r^2}{x^2}\right). \quad (11)$$

Модуль от этого выражения после нормировки на его максимум даст форму диаграммы направленности. Итак, для нахождения диаграммы нужно вычислить  $\tilde{Q}$  (10) и заменить в полученном выражении  $v$  на  $Kr/x = K\theta$ , где  $\theta$  — угол между осью и направлением на точку наблюдения (для параксиальных пучков).

Если каждую из амплитуд волн накачки можно описать как произведение функций, зависящих только от  $r$  и  $x$ , то

$$Q = i\frac{\varepsilon K}{2c^2\rho} p_{01}p_{02}f_1(r)\Phi_1(x)f_2^*(r)\Phi_2^*(x)\exp(-\alpha x). \quad (12)$$

Формула (11) примет вид:

$$P_- = -\frac{\varepsilon\Omega}{2c^4\rho} p_{01}p_{02} \frac{\exp\left(-iK\frac{r^2}{2x}\right)}{4\pi x} D_T D_L. \quad (13)$$

Здесь

$$D_T(v) = 2\pi \int_0^\infty f_1(r)f_2^*(r)J_0(vr)r dr, \quad (14)$$

$$D_L\left(-\frac{v^2}{2K}\right) = \int_0^\infty \exp\left(-\alpha x - i\frac{v^2}{2K}x\right) \Phi_1(x)\Phi_2^*(x) dx. \quad (15)$$

Выражение (14) есть преобразованное по Ханкелю произведение функций, описывающих изменение амплитуд в поперечном сечении пучка. Назовем его “поперечный апертурный множитель”. Выражение (15) — это преобразованное по Фурье

интересоваться расстояниями  $x \gg L$ , верхний предел интегрирования по  $dx'$  можно заменить на  $\infty$ . Решение (6) в дальней зоне примет вид:

$$P_- = \int_0^\infty \tilde{Q}\left(v, -\frac{v^2}{2K}\right) \exp\left(i\frac{v^2}{2K}x\right) J_0(vr) v dv. \quad (9)$$

Здесь

произведение функций, описывающих продольное изменение амплитуд. Назовем его “продольный апертурный множитель”.

Пусть, в частности,

$$f_1 f_2^* = \begin{cases} 1, & r < a, \\ 0, & r > a, \end{cases} \quad \exp(-\alpha x)\Phi_1\Phi_2^* = \exp\left(-2\frac{x}{L_{DIS}}\right), \quad (16)$$

т.е. поперечное распределение амплитуд на поверхности излучателя радиуса  $a$  — равномерное, а продольное имеет вид экспоненты, описывающей затухание. При этом

$$D_T(\theta) = \pi a^2 \frac{2J_1(Ka\theta)}{Ka\theta}, \quad (17)$$

$$D_L(\theta) = \frac{L_{DIS}}{2} \left[ 1 + iKL_{DIS} \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \right]^{-1}.$$

Диаграмма дается выражением

$$D(\theta) = \left[ \frac{2J_1(Ka\theta)}{Ka\theta} \right] \left[ 1 + (KL_{DIS})^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)^4 \right]^{-1/2}. \quad (18)$$

Первый множитель в квадратных скобках соответствует диаграмме, которая сформировалась бы при обычном способе возбуждения ВРЧ непосредственно первичным преобразователем. Угловая полуширина этой кривой  $\theta_{LIN} \approx 1.6 / Ka$ . Второй множитель (его полуширина  $\theta_{NL} \approx 2 / \sqrt{KL_{DIS}}$ ) специфичен для ПИ; именно он в основном определяет форму и ширину диаграммы. Укажем, что функция  $D_L(\theta)$ , найденная Вестервельтом, сводится к (17) заменой  $\sin(\theta/2) \rightarrow \theta/2$ , т.е. для углов  $\theta < 10^\circ - 20^\circ$  обе формулы совпадают.

Представление (12) служит моделью реальной ситуации, когда область взаимодействия ограничена длиной  $L_{DIS} < L_D$ . Если дифракция волн накачки существенна ( $L_{DIS} \gg L_D$ ), из решения (8) следует результат Берктея [14]. Пользуясь в дальней зоне ( $x \gg L_D$ ) выражениями:

$$p_{1,2}(x, r) = i \frac{k_{1,2}}{x} \exp\left(-i \frac{k_{1,2}}{2x} r^2\right) p_{01,02} \tilde{f}_{1,2}\left(k_{1,2} \frac{r}{x}\right), \quad \tilde{f}(v) = \int_0^{\infty} f(r) J_0(vr) r dr, \quad (19)$$

с помощью асимптотической формулы [4] получим [15]:

$$P_- = -i \frac{\varepsilon K k_1 k_2}{2c^2 \rho} p_{01} p_{02} \tilde{f}_1\left(-k_1 \frac{r}{x}\right) f_2^*\left(-k_2 \frac{r}{x}\right) \exp\left(-i \frac{Kr^2}{2x}\right) \frac{\text{Ei}(-\alpha x) - \text{Ei}(-\alpha x_0)}{x}. \quad (20)$$

Здесь  $\text{Ei}$  — интегральная показательная функция,  $x_0 > (\omega / \Omega) L_D$  — начало зоны сферической расходимости для ВРЧ.

Итак, при взаимодействии расходящихся волн на расстояниях  $x > x_0$  формируется диаграмма ВРЧ

$$D(\theta) = D_1(\theta) D_2(\theta), \quad (21)$$

равная произведению двух диаграмм направленности излучателей высокочастотных волн  $\omega_1, \omega_2$ . Таким образом, из общих выражений, приведенных в этом разделе, удастся получить известные предельные результаты.

## 2. ФОРМИРОВАНИЕ ВРЧ В ПОЛЕ НЕДИФРАГИРУЮЩИХ ВОЛН НАКАЧКИ

Динамику формирования дальнего поля ВРЧ удалось описать лишь после того, как для расчета

ПИ начали использовать метод, основанный на упрощенных уравнениях нелинейной акустики [12, 16]. Приведем здесь решение задачи взаимодействия недифрагирующих гауссовых пучков накачки, полагая в общем выражении (8)

$$p_1 p_2^* = p_{01} p_{02} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) \Phi(x). \quad (22)$$

Функция  $\Phi(x)$  описывает осевое изменение амплитуд высокочастотных волн. Мы проанализируем два случая:

$$\Phi(x) = H(L - x), \quad \Phi(x) = \exp(-2x / L_{DIS}). \quad (23)$$

В первом случае область взаимодействия ограничена фильтром ( $H$  — единичная функция Хевисайда), во втором — затуханием. Решение (8) для гауссовых пучков принимает вид:

$$P_- = i \frac{\varepsilon K}{2c^2 \rho} p_{01} p_{02} \int_0^x \frac{\Phi(x')}{1 - i \frac{x - x'}{L_{D,\Omega}}} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2} \frac{1}{1 - i \frac{x - x'}{L_{D,\Omega}}}\right) dx'. \quad (24)$$

Здесь  $L_{D,\Omega}$  — дифракционная длина ВРЧ.

Формула (24) имеет наглядный физический смысл. Если источники ВРЧ сосредоточены на границе  $x = 0$  (т.е.  $\Phi = \delta(x)$ ), выражение (24) переходит в решение однородного параболического уравнения (3) для свободно дифрагирующего гауссова пучка. При всякой другой функции  $\Phi$  выражение (24) описывает интерференцию полей,

создаваемых вторичными источниками ВРЧ. Эти источники распределены вдоль оси  $x$  с линейной плотностью  $\Phi(x)$ , а поперек пучка — по гауссову закону.

Когда область взаимодействия ограничена фильтром, расположенным при  $x = 0$ , интеграл (24) берется и результат выражается через интегральные показательные функции:

$$P_-^{NOR} = \begin{cases} \text{Ei}\left[-\frac{r^2}{a^2} \left(1 - i \frac{x}{L_{D,\Omega}}\right)^{-1}\right] - \text{Ei}\left(-\frac{r^2}{a^2}\right), & x < L, \\ \text{Ei}\left[-\frac{r^2}{a^2} \left(1 - i \frac{x}{L_{D,\Omega}}\right)^{-1}\right] - \text{Ei}\left[-\frac{r^2}{a^2} \left(1 - i \frac{x - L}{L_{D,\Omega}}\right)^{-1}\right], & x > L. \end{cases} \quad (25)$$

Здесь  $P_-^{NOR} = P_- / (\varepsilon K p_{01} p_{02} L_{D,\Omega} / 2c^2 \rho)$  — нормированная величина. Решение (25) полностью

описывает динамику формирования низкочастотного поля. Можно найти, в частности, закон изменения амплитуды ВРЧ на оси пучка:

$$|P_-^{NOR}| = \begin{cases} \left[ \arctan^2 \bar{x} + \frac{1}{4} \ln^2 (1 + \bar{x}^2) \right]^{1/2}, & x < L, \\ \left[ (\arctan \bar{x} - \arctan(\bar{x} - \bar{L}))^2 + \frac{1}{4} \ln^2 \frac{1 + \bar{x}^2}{1 + (\bar{x} - \bar{L})^2} \right]^{1/2}, & x > L. \end{cases} \quad (26)$$

Здесь  $\bar{x} = x / L_{D,\Omega}$ . При малых  $\bar{x}$  из (26) следует, что амплитуда ВРЧ растет по линейному закону, как при взаимодействии плоских волн. При больших  $x \gg L, L_{D,\Omega}$ , амплитуда убывает, как в сферически расходящейся волне ( $\sim L / x$ ).

Зависимости (26) изображены на рис. 1а сплошными кривыми как функции  $\bar{x} = x / L_{D,\Omega}$  для различных значений  $L / L_{D,\Omega} = 0.5, 1, 2, 4$ , указанных при соответствующей кривой. Видно, что амплитуда максимальна в окрестности  $x = L$ . После выхода из области взаимодействия ( $x > L$ ) амплитуда довольно быстро уменьшается. Результат (26) качественно согласуется [12] с экспериментальными данными [2].

Штриховые кривые на рис. 1а дают аналогичные зависимости для области взаимодействия, ограниченной затуханием; параметром кривых является отношение  $L_{DIS} / 2L_{D,\Omega}$ , принимающее те же значения 0.5, 1, 2, что и  $L / L_{D,\Omega}$  для сплошных кривых. Поскольку затухание ограничивает область взаимодействия не столь резко, как фильтр, штриховые кривые выглядят более плавными.

На рис. 1б изображен процесс формирования поперечного распределения амплитуды ВРЧ. Кривые построены для расстояний  $x / L_{D,\Omega} = 0.5, 1, 2, 5$ , указанных при каждой кривой. При построении профилей по формулам (25) использовались таблицы функции  $Ei$  в комплексной области и полагалось  $L \geq 5L_{D,\Omega}$ .

Диаграмма направленности для решения (24), (25) рассчитывается способом, указанным в разделе 1 и имеет вид:

$$D(\theta) = \exp \left[ - \left( \frac{Ka\theta}{2} \right)^2 \right] \left[ \sin \left( \frac{1}{4} KL\theta^2 \right) \times \left( \frac{1}{4} KL\theta^2 \right)^{-1} \right] \sim D_T D_L. \quad (27)$$

Если антенна короткая ( $L \ll L_{D,\Omega}$ ), направленность ВРЧ определяется поперечным апертурным множителем:

$$D_T \sim \exp \left( - \frac{\theta^2}{\theta_T^2} \right), \quad \theta_T = \frac{2}{Ka}. \quad (28)$$

Этот предельный случай соответствует обычному способу излучения ВРЧ. Угловая ширина  $\theta_T$

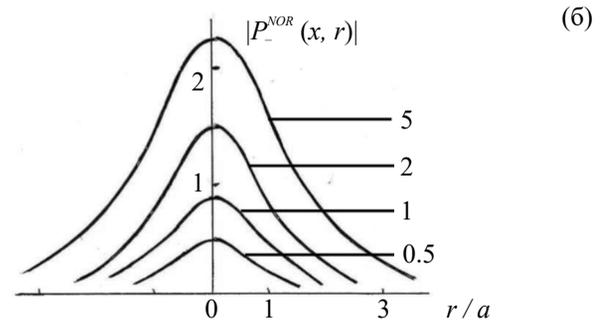
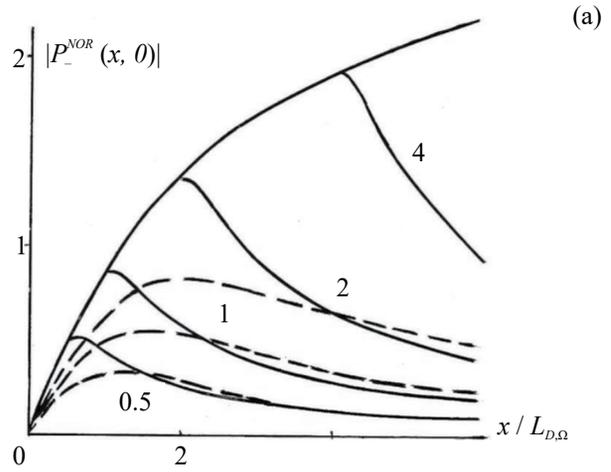


Рис. 1. (а) — Зависимости от расстояния нормированной амплитуды ВРЧ для области взаимодействия, ограниченной фильтром (сплошные кривые) либо затуханием (штриховые кривые); (б) — поперечное распределение амплитуды ВРЧ на разных расстояниях.

обратно пропорциональна числу длин волн, укладываемых на апертуре преобразователя. Когда длина антенны велика и выполнено условие  $L > L_{D,\Omega}$ , становится заметным влияние продольного апертурного множителя:

$$D_L \sim \sin \left( - \frac{\theta^2}{\theta_L^2} \right) \times \left( \frac{\theta^2}{\theta_L^2} \right)^{-1}, \quad \theta_L = \frac{2}{\sqrt{KL}}. \quad (29)$$

Угловая ширина  $\theta_L$  обратно пропорциональна корню из числа длин волн, укладываемых на длине  $L$  области взаимодействия; она может быть много меньшей, чем при обычном способе излучения ( $\theta_L \ll \theta_T$  при  $\sqrt{2L_{D,\Omega}} / L \ll 1$ ).

Чтобы понять динамику формирования диаграмм, нужно проанализировать решение (24), (25) в общем виде. Качественная картина такова. При малых  $x \ll L, L_{D,\Omega}$ , радиальное распределение амплитуды ВРЧ близко к гауссовскому. Затем ширина пучка плавно увеличивается. Как только координата достигнет края антенны ( $x = L$ ), ширина  $a(x)$  начнет увеличиваться быстрее и при  $x \gg L, L_{D,\Omega}$  растёт пропорционально  $x$ . Это означает, что угловая

ширина  $a(x) / x$  перестает зависеть от расстояния и формирование диаграммы закачивается.

Чтобы приближенно описать изменение ширины пучка  $a(x)$  и его угловой ширины, воспользуемся формулой (27) и предположим, что на любом расстоянии  $x$  радиальное распределение ВРЧ определяется произведением продольного и поперечного апертурных множителей с переменными ширинами  $a_{L,T}(x) = \theta_{L,T}(x)x$ :

$$P_-(x,r)P_-^*(x,r) = |P_-(x,0)|^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{a_T^2(x)}\right) \left[ \sin\left(\frac{r^2}{a_L^2(x)}\right) \times \left(\frac{r^2}{a_L^2(x)}\right)^{-1} \right]^2. \quad (30)$$

Здесь закон изменения амплитуды на оси задан выражением (26);  $P_-(x,r)$  — это решение (24). Умножая обе части (30) на  $2\pi r$  и интегрируя по  $dr$  от 0 до  $\infty$ , найдем искомые зависимости ширин от расстояния:

$$\left(\frac{a_L^2(x)}{a_T^2(x)}\right) = \frac{2a^2}{L_{D,\Omega} |P_-^{NOR}(x)|^2} \int_0^x \left(\frac{1}{x'}\right) H(L-x') dx'. \quad (31)$$

В этих формулах  $|P_-^{NOR}(x)|$  — нормированная амплитуда ВРЧ на оси (26). Отметим важное обстоятельство: ширина пучка меньше в той области, где больше давление (в окрестности максимумов на рис. 1а).

При  $x \ll L, L_{D,\Omega}$  из формул (31) получаем:

$$\frac{a_L(x)}{a} \approx \sqrt{\frac{2}{x}} \left(1 + \frac{5}{24} \bar{x}^2\right), \quad \frac{a_T(x)}{a} \approx 1 + \frac{5}{24} \bar{x}^2. \quad (32)$$

Следовательно, на малых расстояниях ширина  $a_T(x)$  поперечного множителя увеличивается от своего исходного значения  $a_T(0) = a$ . Ширина  $a_L(x)$  продольного множителя велика и практически не оказывает влияния на направленность ВРЧ. Однако с увеличением  $x$  ширина  $a_L$  уменьшается и начинает все больше влиять на полную ширину пучка ВРЧ. При  $x \gg L, L_{D,\Omega}$  из формул (31) определим

$$\frac{a_L(x)}{a} \approx \sqrt{\frac{2L}{L_{D,\Omega}}} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{L}{2x}\right), \quad (33)$$

$$\frac{a_T(x)}{a} \approx \frac{L}{L_{D,\Omega}} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{L}{2x}\right).$$

Отсюда видно, что в дальней зоне угловые ширины  $\theta_{L,T} = a_{L,T}(x) / x$  стремятся к постоянным значениям, т.е. формирование диаграммы заканчивается. Сохраненные в (33) малые члены  $L / 2x$

позволяют установить, что диаграмма расширяется и приближение к асимптотическим значениям  $\theta_{L,T}(\infty)$  происходит снизу. Поскольку при малых  $x$  пучок сужается, из анализа предельных случаев следует: существует расстояние, на котором угловая ширина пучка минимальна.

На рис. 2 сплошными кривыми показаны зависимости от  $\bar{x} = x / L_{D,\Omega}$  угловой ширины  $\theta_L$  продольного множителя для различных длин области взаимодействия ( $L / L_{D,\Omega} = 1, 2, 4, 8, 16, \infty$ ). Штриховые кривые изображают аналогичные зависимости угловой ширины  $\theta_T$  поперечного множителя. Оба семейства кривых нормированы на  $\theta_T(\infty)$ , поэтому все штриховые кривые при  $\bar{x} \rightarrow \infty$  стремятся к единице. Как видно из рис. 2, у достаточно длинных антенн (например,  $L / L_{D,\Omega} = 16$ ) ширина  $\theta_L$  велика при малых  $\bar{x}$ ; затем она уменьшается, достигает минимума и вновь увеличивается, но так, что остается меньшей ширины  $\theta_T$  и, тем самым,

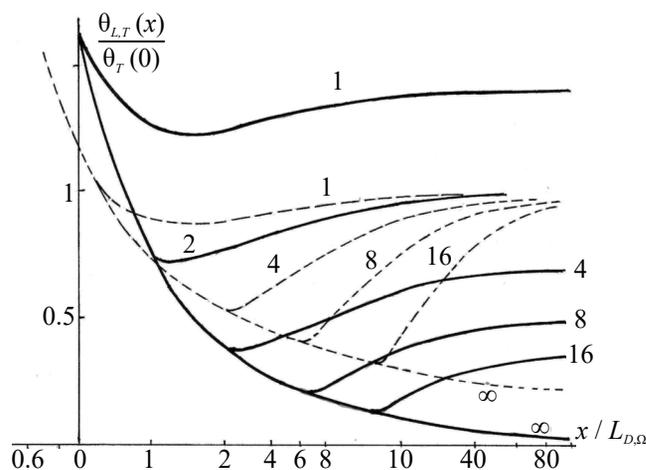


Рис. 2. Угловая ширины  $\theta_L$  продольного множителя для различных длин области взаимодействия, указанных при каждой сплошной кривой; штриховые кривые — аналогичные зависимости угловой ширины  $\theta_T$  поперечного множителя.

определяет полную угловую ширину диаграммы направленности.

Рассмотренный режим работы ПИ для ограниченной фильтром области взаимодействия недифрагирующих волн накачки является простейшим; здесь

все результаты удается представить в наглядной аналитической форме.

Когда область взаимодействия ограничена затуханием, в решении (24) нужно заменить функцию  $\Phi$  экспонентой. Соответствующий интеграл удается взять на оси  $r = 0$ :

$$|P_-^{NOR}(x, 0)|^2 = \exp\left(-\frac{2x}{L_{DIS}}\right) \left| \text{Ei}\left(2\frac{x}{L_{DIS}} + i2\frac{L_{D,\Omega}}{L_{DIS}}\right) - \text{Ei}\left(i2\frac{L_{D,\Omega}}{L_{DIS}}\right) \right|. \quad (34)$$

Зависимости (34) при различных значениях  $L_{D,\Omega}$ ,  $L_{DIS}$  показаны на рис. 3а, 3б. Динамика формирования поля на оси и диаграммы направленности качественно аналогичны уже рассмотренному процессу для ПИ, ограниченного фильтром.

### 3. ВЛИЯНИЕ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НАКАЧКИ

Метод расчета, изложенный в разделе 1, удобен для исследования и более сложных режимов работы ПИ, когда необходимо учитывать дифракцию волн накачки [15], их фокусировку и другие факторы. Рассмотрим здесь генерацию ВРЧ в поле дифрагирующих высокочастотных волн. Положим в решении (6), (7)

$$p_1 = \frac{p_{01}}{1 - i\frac{x}{L_{D,1}}} \exp\left[-\frac{r^2}{a^2} \left(1 - i\frac{x}{L_{D,1}}\right)^{-1}\right],$$

$$p_2^* = \frac{p_{02}}{1 + i\frac{x}{L_{D,2}}} \exp\left[-\frac{r^2}{a^2} \left(1 + i\frac{x}{L_{D,2}}\right)^{-1}\right]. \quad (35)$$

Здесь  $L_{D,1,2} = \omega_{1,2}a^2 / 2c$  — характерные дифракционные длины для волн с частотами  $\omega_{1,2}$ . Функции  $p_{1,2}$  (35) есть точные решения параболических уравнений (3).

Вычисляя последовательно интегралы (6), (7), найдем:

$$P_-(x, r) = i\frac{\varepsilon K}{2c^2\rho} p_{01}p_{02} \int_0^x \frac{\exp(-\alpha x') dx'}{1 + i\frac{L_{D,\Omega}}{L_{D,1}L_{D,2}}x' + i2\frac{x'-x}{L_{D,\Omega}} + \frac{xx'}{L_{D,1}L_{D,2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2} \frac{2 + i\frac{L_{D,\Omega}}{L_{D,1}L_{D,2}}x'}{1 + i\frac{L_{D,\Omega}}{L_{D,1}L_{D,2}}x' + i2\frac{x'-x}{L_{D,\Omega}} + \frac{xx'}{L_{D,1}L_{D,2}}}\right). \quad (36)$$

С помощью (36) довольно просто рассчитывается одна из основных характеристик ПИ — зависимость амплитуды ВРЧ от расстояния на оси пучка. Например, для области взаимодействия волн, ограниченной фильтром, получаем:

$$P_-^{NOR}(x, 0) = \frac{i}{L_{D,\Omega}} \int_0^x \frac{H(L-x') dx'}{1 + i\frac{L_{D,\Omega}}{L_{D,1}L_{D,2}}x' + i2\frac{x'-x}{L_{D,\Omega}} + \frac{xx'}{L_{D,1}L_{D,2}}}. \quad (37)$$

Вычисление (37) дает

$$|P_-^{NOR}| = \left[ \left(2 + \frac{L_{D,\Omega}^2}{L_{D,1}L_{D,2}}\right)^2 + \frac{L_{D,\Omega}^2}{L_{D,1}L_{D,2}^2} x^2 \right]^{-1/2} \times$$

$$\times \left\{ \ln^2 \left[ \Psi_1 \left(1 + 4\frac{x^2}{L_{D,\Omega}^2}\right)^{-1/2} \right] + \right. \quad (38)$$

$$\left. + \left( \arctan \Psi_2 + \arctan \frac{2x}{L_{D,\Omega}} \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

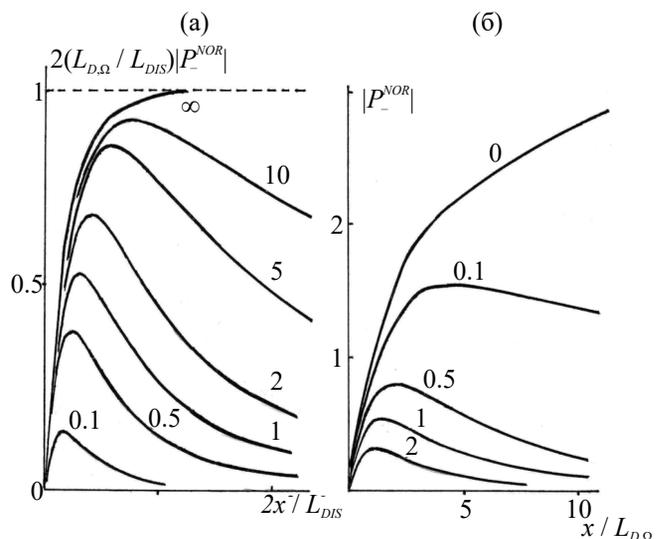


Рис. 3. Зависимости от расстояния нормированной амплитуды ВРЧ для области взаимодействия, ограниченной затуханием.

Здесь обозначено:

$$\Psi_1^2 = \begin{cases} \left(1 + \frac{x^2}{L_{D,1}L_{D,2}}\right)^2 + \frac{L_{D,\Omega}^2}{L_{D,1}^2L_{D,2}^2}x^2, & x < L, \\ \left(1 + \frac{Lx}{L_{D,1}L_{D,2}}\right)^2 + \left(2\frac{L-x}{L_{D,\Omega}} + \frac{L_{D,\Omega}L}{L_{D,1}L_{D,2}}\right)^2, & x > L, \end{cases} \quad (39)$$

$$\Psi_2 = \begin{cases} \frac{L_{D,\Omega}}{L_{D,1}L_{D,2}}x\left(1 + \frac{x^2}{L_{D,1}L_{D,2}}\right)^{-1}, & x < L, \\ \left(2\frac{L-x}{L_{D,\Omega}} + \frac{L_{D,\Omega}L}{L_{D,1}L_{D,2}}\right)\left(1 + \frac{x^2}{L_{D,1}L_{D,2}}\right)^{-1}, & x > L. \end{cases} \quad (40)$$

В случае большого снижения по частоте  $n = \omega_1 / \Omega$  в решении (38)–(40) имеются три сильно различающихся пространственных масштаба:  $L_{D,\Omega}$ ,  $\sqrt{L_{D,1}L_{D,2}} \approx nL_{D,\Omega}$ , и  $L_{D,1}L_{D,2} / L_{D,\Omega} \approx n^2L_{D,\Omega}$ ; четвертый масштаб  $L$  может быть произвольным. Очевидно, что на практике могут встретиться разнообразные ситуации, и анализ формул типа (36)–(40) следует проводить с учетом конкретных ограничений, налагаемых условиями эксперимента или техническим заданием. Такой анализ детально проведен в работах [18, 19], где указано на согласие с изложенной здесь теорией.

На рис. 4 показано, как ведет себя нормированная амплитуда ВРЧ на оси пучка для различных коэффициентов  $n$  при  $L \rightarrow \infty$ . Видно, что дифракция волн накачки приводит к появлению максимума, расположенного на расстоянии  $x \approx \sqrt{L_{D,1}L_{D,2}}$  и равного

$$|P_-^{NOR}|_{\text{MAX}} \approx \frac{1}{4} \sqrt{\ln^2 n(n-1) + \pi^2}. \quad (41)$$

Для расчета диаграммы направленности воспользуемся общими формулами (9), (10) и получим

$$\tilde{Q} = i \frac{\varepsilon K a^2}{8c^2 \rho} p_{01} p_{02} \exp\left(-\frac{v^2 a^2}{8}\right) \int_0^L \frac{dx}{1 + i \frac{L_{D,\Omega} x}{2L_{D,1}L_{D,2}}} \exp\left(-i \frac{v^2 a^2}{8} \frac{\left(1 + \frac{L_{D,\Omega}^2}{4L_{D,1}L_{D,2}}\right) \frac{2x}{L_{D,\Omega}}}{1 + i \frac{L_{D,\Omega} x}{2L_{D,1}L_{D,2}}}\right). \quad (42)$$

Диаграмма описывается выражением:

$$D(v = K\theta) = \exp\left(-\frac{v^2 a^2}{8}\right) \left| \int_0^\chi \frac{dy}{1 + iy} \exp\left(-\frac{v^2 a^2}{8} \frac{\beta y}{1 + iy}\right) \right| \times \left| \int_0^\chi \frac{dy}{1 + iy} \right|^{-1}, \quad \beta = 4n(n-1) + 1, \quad \chi = \frac{L}{2n(n-1)L_{D,\Omega}}. \quad (43)$$

Интересно, что существует лишь два характерных масштаба изменения подынтегральной функции (42):  $L_{D,\Omega}$  и  $L_{D,1}L_{D,2} / L_{D,\Omega} = n^2L_{D,\Omega}$ . Третий (промежуточный) масштаб  $\sqrt{L_{D,1}L_{D,2}} \equiv L_D \approx nL_{D,\Omega}$ , определявший поведение амплитуды на оси пучка, здесь отсутствует. Это означает, что диаграмма направленности, сформированная на нескольких дифракционных длинах  $L_{D,\Omega}$  для ВРЧ, будет слабо изменяться с увеличением области взаимодействия. Новые заметные изменения диаграммы начнутся после того, как будет пройдено расстояние, кратное многим дифракционным длинам

высокочастотных волн (т.е. при  $x \sim nL_D$ ). Этот факт объясняет наблюдающуюся в экспериментах слабую зависимость формы и ширины диаграммы направленности от изменения разностной частоты в широких пределах [18, 19].

Для наглядного представления зависимости ширины диаграммы от длины области взаимодействия разложим экспоненты (43) до членов  $\sim v^2 a^2 / 8$ , после чего интеграл удастся выразить через элементарные функции. Поведение ширины, нормированной на свое исходное значение, описывается формулой:

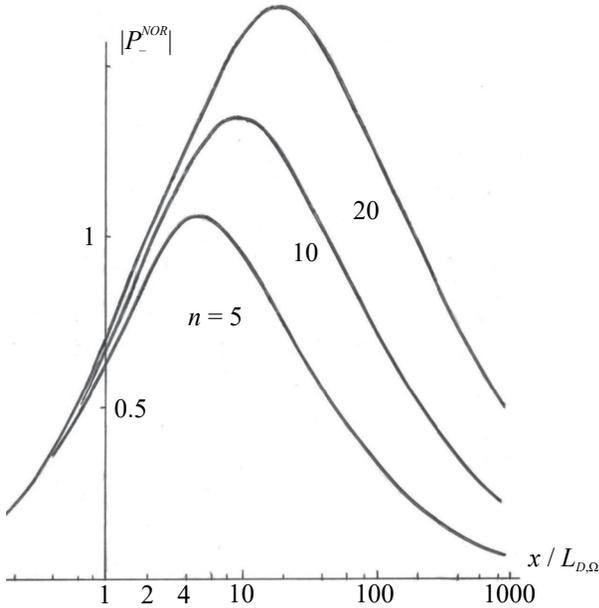


Рис. 4. Зависимости от расстояния нормированной амплитуды ВРЧ на оси пучка для различных коэффициентов  $n$ .

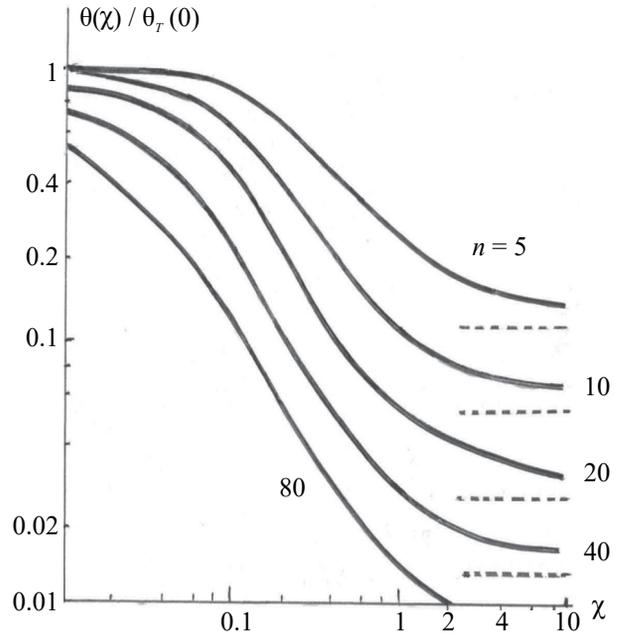


Рис. 5. Зависимости от расстояния нормированной ширины диаграммы направленности для различных  $n$ .

$$\frac{\theta(\chi)}{\theta_T(0)} = \left( 1 + \beta - \beta \frac{\chi}{1 + \chi^2} \frac{\arctan \chi + \chi \ln \sqrt{1 + \chi^2}}{\arctan^2 \chi + \ln^2 \sqrt{1 + \chi^2}} \right)^{-1/2} \quad (44)$$

Как показано на рис. 5, ширина диаграммы направленности уменьшается до асимптотического ( $\chi \rightarrow \infty$ ) значения  $1 / \sqrt{4n(n-1)}$ , соответствующего сферически расходящимся взаимодействующим волнам накачки.

Укажем, что на основе изложенной теории выполнены детальные инженерные расчеты основных характеристик ПИ. Пользуясь имеющимися номограммами, можно количественно определить необходимые параметры нелинейных излучающих антенн [4].

Итак, в разделах 1–3 изложена теория ПИ звука, учитывающая затухание и дифракцию взаимодействующих волн в квазиоптическом приближении. Получены универсальные формулы для расчета диаграмм направленности ПИ. Описана динамика формирования диаграмм.

#### 4. ОСОБЕННОСТИ РАБОТЫ ПИ В РЕЖИМЕ СИЛЬНО ИСКАЖЕННЫХ ВОЛН НАКАЧКИ

В разделах 1–3 обсуждалась работа ПИ при слабом проявлении нелинейности. Для повышения эффективности преобразования частоты вниз используются интенсивные волны накачки, профиль

которых заметно искажен [20]. Из-за образования ударных волн и сильного нелинейного поглощения происходит ограничение области взаимодействия на расстоянии порядка  $L_{SH}$ . Это сказывается на форме диаграммы направленности и законе изменения амплитуды ВРЧ вдоль оси. Появляется ряд новых явлений: генерация гармоник ВРЧ с частотами  $n\Omega$  и нелинейная зависимость амплитуды сигнала от произведения амплитуд волн накачки.

Когда форма волны близка к пилообразной, нужно учитывать большое число высокочастотных гармоник и метод последовательных приближений не применим. Воспользуемся методом усреднения поля по быстрым высокочастотным осцилляциям. Разделяя в уравнении (1) высокочастотную и низкочастотную части поля  $p = p_\omega + P_\Omega$  и проводя усреднение, получим:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\partial P_\Omega}{\partial x} - \frac{b}{2c^3 \rho} \frac{\partial^2 P_\Omega}{\partial \tau^2} \right] - \frac{c}{2} \Delta_\perp P_\Omega = \frac{\epsilon}{2c^3 \rho} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \langle p_\omega^2 \rangle. \quad (45)$$

Уравнение (45) содержит член  $\Delta_\perp P_\Omega$ , поскольку при работе ПИ принципиально нужно учитывать дифракцию низкочастотных компонент спектра.

Генерация низких частот мало сказывается на поведении высокочастотной части поля. Поэтому величину  $p_\omega$  при расчете правой части (45) можно определить, решив уравнение Бюргерса с граничным условием:

$$p(x=0, r, \tau) = A(r)(1 - m \cos \Omega \tau) \sin \omega \tau. \quad (46)$$

Соответствующее решение содержит как гармоники волны накачки  $n\omega$ , так и гармоники огибающей  $n\Omega$ . После усреднения по быстрым осцилляциям величина  $\langle p_\omega^2 \rangle$  будет содержать только низкочастотные гармоники:

$$\langle p_\omega^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \langle p_\omega^2 \rangle_n \exp(in\Omega\tau) + c.c. \quad (47)$$

Подставляя это выражение в (45), видим, что распределенные источники в правой части уравнения возбуждают такой же набор низкочастотных гармоник:

$$P_\Omega = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n\Omega} \exp(in\Omega\tau) + c.c. \quad (48)$$

Для каждой из амплитуд  $A_{n\Omega}$  получаем неоднородное параболическое уравнение:

$$\frac{\partial A_{n\Omega}}{\partial x} - \frac{1}{2inK} \Delta_\perp A_{n\Omega} = i \frac{\varepsilon n K}{2c^2 \rho} \langle p_\omega^2 \rangle_n = Q_n(x, r). \quad (49)$$

Реализация такой схемы расчета затруднена отсутствием общих простых выражений для распределенных источников  $Q_n$ . Однако в ряде задач удается получить аналитические решения.

Исследуем вначале поведение диаграмм направленности низкочастотных гармоник. Вычислим функцию  $\tilde{Q}$  согласно (10). Пусть амплитуда волны накачки постоянна по сечению круглого пучка радиуса  $a$  и равна нулю вне его:  $A(r) = p_0 H(1 - r/a)$ . Из-за слабой дифракции высокочастотных волн функцию  $Q_n$  положим равной:

$$Q_n(x, r) = i \frac{\varepsilon n K}{2c^2 \rho} A^2(r) \Phi_n(x). \quad (50)$$

Формула (10) примет вид:

$$\tilde{Q}_n = i \frac{\varepsilon n K}{2c^2 \rho} p_0^2 \frac{a^2}{2} \left[ \frac{2J_1(va)}{va} \right] \int_0^\infty \Phi_n(x) \exp\left(-i \frac{v^2}{2nK} x\right) dx. \quad (51)$$

Итак, в этом случае диаграмма направленности представляется как произведение поперечного и продольного апертурных множителей. Выражение  $D_T(\theta)$  дается формулой (17), а продольный множитель для гармоники  $n\Omega$  равен преобразованному по Фурье распределению источников  $\Phi_n(x)$  вдоль оси  $x$ :

$$D_L(\theta) = \int_0^\infty \Phi_n(x) \exp\left(-i \frac{n}{2} K \theta^2 x\right) dx. \quad (52)$$

Функции  $\Phi_n(x)$  можно определить из решения задачи для плоских волн. Как видно из уравнения (49), при отсутствии дифракции

$\Phi_n \sim Q_n = \partial A_{n\Omega} / \partial x$ . Таким образом, располагая данными о поведении амплитуд гармоник огибающей в плоской волне, можно найти функции  $\Phi_n(x)$ , а затем по формуле (52) рассчитать диаграммы направленности.

Эти функции приближенно вычислены в работах [21, 22]. Их зависимости от приведенного расстояния  $x / L_{SH}$  изображены на рис. 6 (штриховые кривые) для глубины модуляции  $m = 0.9$ . Как видно, имеется различие в поведении кривых. Для первой гармоники в области до разрыва функция  $Q_1$  постоянна; затем она монотонно убывает. Плотность источников  $Q_2$  волны второй гармоники до разрыва также постоянна, а после разрыва быстро уменьшается и меняет свой знак, т.е. волна  $2\Omega$  начинает генерироваться в противофазе. Третья гармоника  $3\Omega$  возникает только после образования разрыва, причем также меняет свой знак.

Пространственное поведение амплитуд гармоник (сплошные кривые на рис. 6) можно проследить, интегрируя распределения для  $Q_n$ . Аналогичные результаты получены с помощью численного расчета [23].

Отметим, что в соответствии с (52) и зависимостью  $I'$  на рис. 6 диаграмма направленности для первой гармоники  $A_\Omega$  качественных особенностей не обнаруживает. Интересный вид приобретает диаграмма для второй низкочастотной гармоники  $A_{2\Omega}$ . Это связано с тем, что кривая  $2'$  на рис. 6 имеет знакопеременный характер. Аппроксимируем

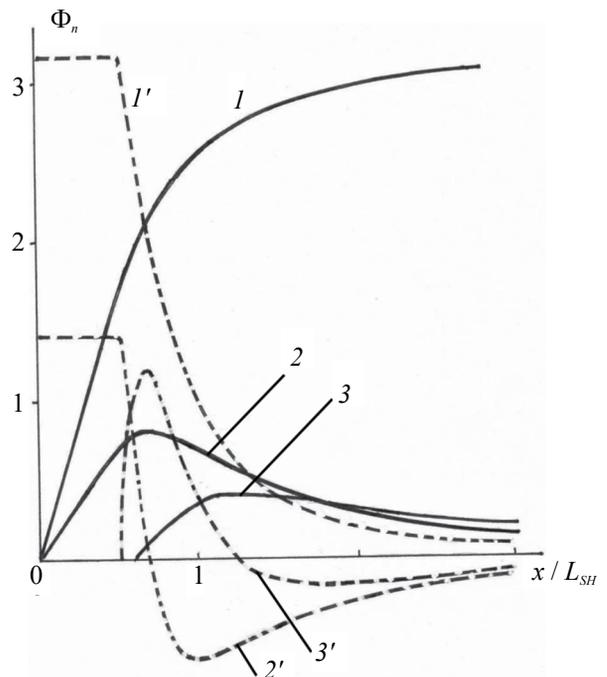


Рис. 6. Зависимости от расстояния амплитуд первых трех низкочастотных гармоник (сплошные кривые) и их источников (штриховые кривые).

эту зависимость простой функцией — разностью двух экспонент:

$$\Phi_2(x) \sim \exp\left(-\frac{2x}{l_1}\right) - \kappa \exp\left(-\frac{2x}{l_2}\right). \quad (53)$$

Здесь  $\kappa < 1$ ,  $l_1 / l_2 < 1$  — свободные параметры, вариацией которых можно изменять форму кривой с целью приблизить ее к реальной зависимости  $\Phi_2(x)$ . Вычисляя интеграл (52), найдем:

$$|D_L(\theta)| \sim \left[ \frac{l_1^2}{1 + \frac{\theta^4}{\theta_1^4}} + \kappa^2 \frac{l_2^2}{1 + \frac{\theta^4}{\theta_2^4}} - 2\kappa l_1 l_2 \frac{1 + \frac{\theta^4}{\theta_1^2 \theta_2^2}}{\left(1 + \frac{\theta^4}{\theta_1^4}\right)\left(1 + \frac{\theta^4}{\theta_2^4}\right)} \right]^{1/2}. \quad (54)$$

Здесь обозначено  $\theta_{1,2} = 2 / \sqrt{2\kappa l_{1,2}}$ .

Диаграмма (54) изображена на рис. 7 для трех значений  $\kappa = 0.25, 0.35, 0.5$  и отношения  $l_1 / l_2 = 0.25$ . Видно, что в ее центре может образоваться провал. Он достигает наибольшей величины (амплитуда  $A_{2\Omega}$  падает до нуля) при  $l_1 = \kappa l_2$ , т.е. в том случае, когда площадь под кривой  $\Phi_2(x)$  равна нулю. Этот факт имеет общий характер и не связан с принятой аппроксимацией (53). Как следует из формулы (52), равенство нулю  $A_{2\Omega}$  на оси диаграммы (при  $\theta = 0$ ) имеет место всегда, если

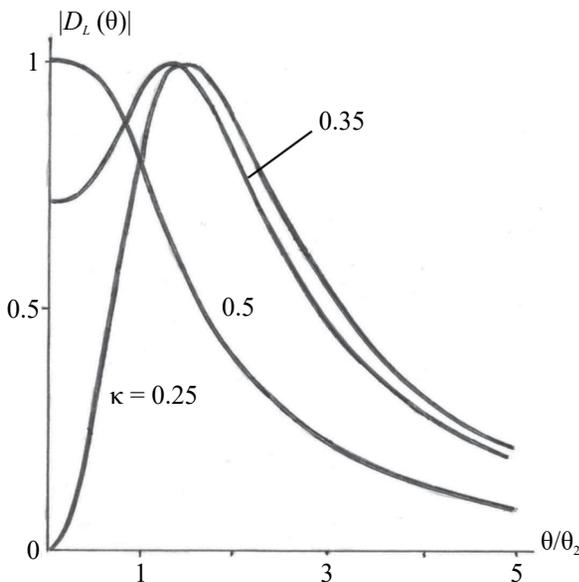


Рис. 7. Диаграмма направленности для амплитуды второй низкочастотной гармоники, содержащая провал на оси пучка.

интеграл  $\int_0^\infty \Phi_2(x) dx = 0$ . Ранее указывалось, что этот интеграл пропорционален асимптотическому значению  $A_{2\Omega}(x \rightarrow \infty)$ , получаемому из решения уравнения Бюргерса. Таким образом, анализ задачи для плоских волн позволяет установить, имеется ли провал в центре диаграммы направленности.

Асимптотическое поведение низкочастотных гармоник, генерируемых разрывными плоскими волнами накачки, описывается решением уравнения Бюргерса:

$$P_\Omega = \frac{b}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \tau} \ln I_0 \left[ \frac{\varepsilon p_0}{b\omega} f(\Omega\tau) \right] = p_0 \frac{\Omega}{\omega} f' \frac{I_1}{I_0}. \quad (55)$$

Оно справедливо на расстояниях  $x > L_{DIS}$ ,  $x \ll L_{DIS,\Omega}$  для произвольного закона амплитудной модуляции  $f(\Omega\tau)$ . При  $\Gamma \ll 1$  имеем  $I_1 / I_0 \approx 1$ , т.е. форма низкочастотного сигнала определяется производной от огибающей. Для волны, модулированной по гармоническому закону (46), получаем

$$P_\Omega = p_0 \frac{\Omega}{\omega} m \sin \Omega\tau. \quad (56)$$

Этот результат показывает, что при сильном проявлении нелинейности на больших расстояниях остается лишь первая гармоника огибающей; амплитуды же волн  $A_{2\Omega}$  и  $A_{3\Omega}$  стремятся к нулю. Следовательно, в центре диаграмм направленности этих гармоник должны возникать провалы, и диаграммы принимают вид двугорбых кривых (рис. 7). Это явление имеет место только для сигнала (46). Например, в случае бигармонического сигнала с одинаковыми амплитудами форма огибающей дается функцией  $f = 2|\cos(\Omega\tau / 2)|$ , спектр производной от которой, в отличие от (56), содержит весь набор низкочастотных гармоник. Их амплитуды при  $x \rightarrow \infty$  стремятся к ненулевым постоянным значениям, и провалы в центре диаграмм отсутствуют.

Двугорбые диаграммы наблюдались экспериментально (см., например, [24]).

Процесс формирования диаграммы для второй низкочастотной гармоники изображен на рис. 8 для различных расстояний  $x / L_{SH}$ , равных 0.5 (штриховая кривая), 2, 3.5, 4, 5, 6. Дифракция становится заметной при  $x / L_{SH} \sim 2$ , поэтому на расстоянии 0.5 волну высокой частоты можно считать плоской. Для расстояний, меньших 2, не имеет смысла говорить об угловой структуре, и штриховая кривая изображает зависимость нормированного квадрата амплитуды  $A_{n\Omega}^2$  от радиальной координаты  $r / a$ . Для остальных кривых по оси абсцисс отложена угловая координата  $\theta L_{SH} / a$ .

На рис. 8а отметим два процесса: установление ширины диаграммы и формирование провала

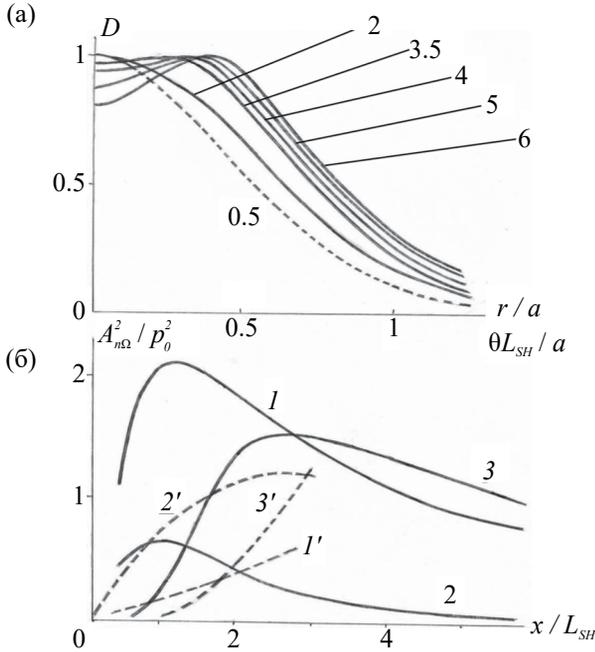


Рис. 8. (а) — Формирование диаграммы второй низкочастотной гармоники и провала в ее центре; (б) — поведение квадратов амплитуд первых трех гармоник на оси пучка (сплошные кривые) и при образовании разрывов в зоне сферической расходимости (штриховые кривые).

в центре. Стационарная ширина достигается при  $x \sim L_D$ , и этот процесс связан с дифракцией. Провал же образуется из-за нелинейности и заметен на расстояниях, где функция  $\Phi_2(x)$  меняет знак.

Поведение квадратов нормированных амплитуд  $A_{n\Omega}^2 / p_0^2$  первых трех гармоник для  $r = 0$  и параметров  $\Gamma = 0.05$ ,  $N = 0.3$ ,  $\Omega / \omega = 0.1$  изображено на рис. 8б сплошными кривыми 1, 2, 3. Значения на оси ординат увеличены в  $10^3$  раз (кривая 1),  $10^4$  (кривая 2) и  $0.25 \times 10^6$  (кривая 3). Штриховые кривые на рис. 8б представляют результаты для  $L_{SH} = 3L_D$ , когда разрывы формируются уже в зоне сферической расходимости волн накачки. При этом масштаб проявления нелинейных искажений увеличивается, а изменение амплитуд с расстоянием происходит медленнее. Значения по оси ординат увеличены в  $10^4$  раз (кривая 1'),  $10^5$  (2') и  $10^6$  (3'). Результаты для ПИ со сферически расходящимися волнами накачки получены в работах [25, 26].

Обсудим форму низкочастотного сигнала, представляющего собой комбинацию нескольких гармонических составляющих. Согласно (11), поле на оси в дальней зоне имеет вид

$$A_{n\Omega}(x, \theta = 0) = -\frac{\varepsilon a^2 (nK)^2 p_0^2}{4c^2 \rho} \frac{1}{x} \int_0^\infty \Phi_n(x) dx. \quad (57)$$

Форма сигнала дается рядом Фурье (48), коэффициенты которого находятся по формуле (57):

$$P_\Omega(x, \tau, \theta = 0) = \frac{\varepsilon a^2 p_0^2}{8c^4 \rho} \frac{1}{x} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \sum_{n=1}^\infty \exp(in\Omega\tau) \int_0^\infty \Phi_n(x) dx + c.c. \quad (58)$$

Выражение под знаком суммы имеет наглядный смысл. Действительно, решение плоской задачи, соответствующее (57) (как это следует из уравнения (45) при  $\Delta_\perp = 0$ ), равно:

$$A_{n\Omega}(x \rightarrow \infty) = i \frac{\varepsilon n \Omega}{2c^3 \rho} p_0^2 \int_0^\infty \Phi_n(x) dx. \quad (59)$$

Таким образом, асимптотическая форма плоской волны дается выражением:

$$P_\Omega(x \rightarrow \infty, \tau) = \frac{\varepsilon p_0^2}{4c^3 \rho} \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_{n=1}^\infty \exp(in\Omega\tau) \int_0^\infty \Phi_n(x) dx + c.c. \quad (60)$$

Сравнивая (58) и (60), найдем связь между решением задачи для плоских волн и низкочастотным полем в дальней зоне на оси пучка:

$$P_\Omega(x, \tau, \theta = 0) = \frac{a^2}{2cx} \frac{\partial}{\partial \tau} P_\Omega(x \rightarrow \infty, \tau). \quad (61)$$

Поскольку, согласно (55), асимптотическая форма плоской волны описывается первой производной от функции огибающей, то

$$P_\Omega(x, \tau, \theta = 0) = p_0 \frac{\Omega L_{D,\Omega}}{\omega} \frac{1}{x} f''(\Omega\tau). \quad (62)$$

Таким образом, форма сигнала в дальней зоне пропорциональна второй производной от огибающей исходной амплитудно-модулированной волны.

Когда волна модулирована по гармоническому закону, поле (62) не содержит особенностей. Однако для других видов модуляции двукратное дифференцирование “обостряет” форму низкочастотного сигнала в дальней зоне. Например, упомянутая выше огибающая бигармонического сигнала с равными амплитудами периодически терпит излом. Поэтому в окрестностях  $\Omega\tau = \pi(2n+1)$  вторая производная может достигать большой величины, что и наблюдалось в эксперименте [24].

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Интерес к формированию низкочастотных акустических полей источниками малой апертуры стимулировался вначале гидроакустическими приложениями. Среди них отметим задачи дальнего распространения излучения ПИ в океане [27] и селективного возбуждения одномодового

режима в волноводе [28]. Позднее привлекли интерес устройства воздушной акустики [3, 29, 30]. Обсуждались возможности дополнительной локализации низкочастотных сигналов [31]. В связи с развитием компьютерных технологий и вычислительных методов появились работы [32, 33], ориентированные на использование ПИ в медицинской технике. Библиография публикаций приведена в разделе 05.08 на сайте [www.akzh.ru](http://www.akzh.ru) [34].

Интересно отметить также, что аналогия с ПИ применена в нелинейной оптике для генерации инфракрасного излучения лазерными пучками видимого диапазона; при этом не требуются специальные условия для реализации синхронного взаимодействия световых волн [35].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Westervelt P.J.* Parametric acoustic array // *J. Acoust. Soc. Am.* 1963. V. 35. No 4. P. 535–537.
2. *Зверев В.А., Калачев А.И.* Измерение рассеяния звука звуком при наложении параллельных пучков // *Акуст. журн.* 1968. Т. 14. № 2. С. 214–220.
3. *Зверев В.А.* Как зарождалась идея параметрической акустической антенны // *Акуст. журн.* 1999. Т. 45. № 5. С. 685–692.
4. *Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И.* Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981.
5. *Мюир Т.Дж.* Нелинейная акустика и ее роль в геофизике морских осадков // В книге: *Акустика морских осадков*. М.: Мир, 1977.
6. *Богородский А.В.* Использование нелинейных эффектов в подводной акустике // *Судостроение за рубежом*. 1976. № 4. С. 64–72.
7. *Konrad W.L.* Design and application of high-power parametric sonars // *IEEE Int. Conf. of Engineering in the Ocean Environmental*. 1973. P. 310–315.
8. *Kritz.* Parametric array Doppler sonar // *IEEE J. of Oceanic Engineer.* 1977. OE-2. No 2. P. 190–200.
9. *Зарембо Л.К.* Акустическая излучающая параметрическая антенна // *Успехи физ. наук*. 1979. Т. 128. № 4. С. 713–720.
10. *Hobaek H.* Parametric acoustic transmitting arrays — a survey of theories and experiments. *Sci.-Tech. Rept.* No. 99. Univ. of Bergen, Norway, 1977.
11. *Новиков Б.К., Руденко О.В., Солуян С.И.* Анализ параметрического излучателя ультразвука методом нелинейного уравнения Заболотской-Хохлова // 8-е Всесоюз. совещание по квант. акуст. и акустоэл-ке. Казань, 1974.
12. *Новиков Б.К., Руденко О.В., Солуян С.И.* К вопросу о параметрическом излучателе ультразвука // *Акуст. журн.* 1975. Т. 21. № 4. С. 591–597.
13. *Тимошенко В.И.* Расчет и проектирование параметрических акустических преобразователей. Учебное пособие. Таганрог: Изд. ТРТИ, 1978.
14. *Berktau H.O., Leahy D.J.* Farfield performance of parametric transducers // *J. Acoust. Soc. Am.* 1974. V. 55. P. 539–546.
15. *Куницын В.Е., Руденко О.В.* Генерация гармоник и формирование параметрического излучения при равномерном распределении амплитуды колебаний на поверхности плоского излучателя ультразвука // *Прикладная акустика (Межвуз. тематич. сборник)*. № 6. С. 3–16. Таганрог: Изд. ТРТИ, 1978.
16. *Новиков Б.К., Руденко О.В., Солуян С.И.* Волновые взаимодействия в ограниченных пучках и теория параметрических излучателей ультразвука // 6-й Межд. Симп. по нелин. акустике. С. 190–197. М.: Изд. Моск. ун-та, 1975.
17. *Новиков Б.К., Руденко О.В., Солуян С.И.* О влиянии дифракционных эффектов на работу параметрического излучателя // *Прикладная акустика (Межвуз. тематич. сборник)*. № 2. С. 13–19. Таганрог: Изд. ТРТИ, 1976.
18. *Воронин В.А., Рыбачек М.С., Тарасов С.П., Тимошенко В.И.* Измерительные широкополосные нелинейные излучатели звука для акустических исследований // В книге: *Акустические методы исследования океана*. Вып. 294. С. 126–132. Л.: Судостроение, 1978.
19. *Новиков Б.К., Рыбачек М.С., Тимошенко В.И.* Взаимодействие дифрагирующих звуковых пучков и теория высоконаправленных излучателей ультразвука // *Акуст. журн.* 1977. Т. 23. № 4. С. 621–626.
20. *Willette J.G., Moffett M.B.* Harmonics of the difference frequency in saturation-limited parametric sources // *J. Acoust. Soc. Am.* 1977. V. 42. No 6. P. 1377–1386.
21. *Наугольных К.А., Солуян С.И., Хохлов Р.В.* О нелинейном взаимодействии звуковых волн в поглощающей среде // *Акуст. журн.* 1963. Т. 9. № 2. С. 192–197.
22. *Новиков Б.К., Руденко О.В., Солуян С.И.* О некоторых особенностях взаимодействия модулированных волн, содержащих разрывы // Симп. по физ. акуст.-гидродинамич. явлений. С. 243–245. М.: Наука, 1975.
23. *Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Руденко О.В.* Особенности работы мощных параметрических излучателей звука // *Акуст. журн.* 1978. Т. 24. № 1. С. 125–127.
24. *Willette J.G., Moffett M.B., Konrad W.L.* Difference-frequency harmonics from saturation-limited parametric acoustic sources // *Труды 6-го Межд. Симп. по нелин. акустике*. Т. 1. С. 308–319. М.: Изд. Моск. ун-та, 1976.
25. *Сутин А.М.* О предельном режиме работы параметрического излучателя ультразвука // *Акуст. журн.* 1978. Т. 24. № 1. С. 104–110.
26. *Гурбатов С.Н., Демин И.Ю., Сутин А.М.* Взаимодействие нелинейно ограниченных сферических пучков в параметрических излучателях // *Акуст. журн.* 1979. Т. 25. № 4. С. 515–525.
27. *Есипов И.Б., Калачев А.И., Соколов А.Д., Сутин А.М., Шаронов Г.А.* Исследования дальнего распространения сигналов мощного параметрического излучателя // *Акуст. журн.* 1994. Т. 40. № 1. С. 71–75.

28. *Зверев В.А., Донской Д.М., Сутин А.М.* Параметрическое взаимодействие акустических сигналов в плоском волноводе // Докл. Акад. наук СССР. 1986. Т. 289. № 5. С. 1111–1115.
29. *Виноградов Н.С., Дорофеев М.С., Коробов А.И., Михайлов С.Г., Руденко О.В., Шанин А.В., Шилкин А.О.* О нелинейной генерации звука в воздухе волнами ультразвуковых частот // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 2. С. 189–194.
30. *Руденко О.В.* Нелинейный экран как элемент систем для звукопоглощения и преобразования частоты // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 1. С. 38–43.
31. *Hedberg С.М., Haller К.С.Е., Katakura Т.* A self-silenced sound beam // Acoust. Physics. 2010. V. 56. No 5. P. 637–639.
32. *Тюрина А.В., Юлдашев П.В., Есипов И.Б., Хохлова В.А.* Численная модель спектрального описания генерации ультразвуковой волны разностной частоты при двухчастотном взаимодействии // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 2. С. 152–161.
33. *Тюрина А.В., Юлдашев П.В., Есипов И.Б., Хохлова В.А.* Генерация акустической волны разностной частоты в дифрагирующей пучке волн накачки в квазилинейном приближении // Акуст. журн. 2023. Т. 69. № 1. С. 22–31.
34. *Шамаев В.Г., Горшков А.Б.* Русскоязычное направление работы российских информационных служб // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 1. С. 104–116.
35. *Абдуллин У.А., Ляхов Г.А., Руденко О.В., Чиркин А.С.* Возбуждение разностных частот в нелинейной оптике и условия черенковского излучения // Журн. эксп. теор. физ. 1974. Т. 66. № 4. С. 1295–1304.

## Nonlinear Formation of Low-Frequency Field by Diffracting High-Frequency Wave Beams

O. V. Rudenko<sup>a,b,c,\*</sup>

<sup>a</sup>*Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Russia*

<sup>b</sup>*Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Russia*

<sup>c</sup>*Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, Russia*

\*e-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

The universal theory of “parametric” sound emitters is presented, taking into account the attenuation and diffraction of interacting waves in the quasi-optical approximation. Expressions are given that describe the structure of the low-frequency field excited by high-frequency waves with arbitrary amplitude and phase distributions on the surface of pump converters. Universal formulas for calculating directional patterns are given. The dynamics of pattern formation is described. The results of calculating the regime of highly distorted pump waves containing shock fronts are presented.

*Keywords:* nonlinear generation, low frequencies, diffracting beams, directional pattern